马来西亚华文独中教科书

数学

初三上册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

马来西亚华文独中教科书

数学

初三上册



董教总华文独中工委会统一课程委员会编纂

《数学》初三上册

行 政 编 辑：黄宝玉
设计与排版：蔡思盛

© 郑重声明，此书版权归出版单位所有，未经允许，书上所有内容不得通过任何形式进行复制、转发、储存于检索系统，或翻译成其它语言的活动。

© Dong Zong
Hak cipta terpelihara. Mana-mana bahan atau bahagian dalam buku ini tidak dibenarkan diterbitkan semula, disimpan dalam cara yang boleh dipergunakan lagi, atau ditukar kepada apa-apa bentuk atau apa-apa cara, baik dengan elektronik, mekanikal, fotokopi, rakaman, pengalihan bahasa dan sebagainya tanpa mendapat kebenaran secara menulis daripada pihak penerbit terlebih dahulu.

© Dong Zong
All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, translated in any other languages, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

编辑单位：
董教总华文独中工委会统一课程委员会
Unified Curriculum Committee of
Malaysian Independent Chinese Secondary School Working Committee（MICSS）

出版发行：
马来西亚华校董事联合会总会（董总）
United Chinese School Committees' Association of Malaysia（Dong Zong）
Blok A, Lot 5, Seksyen 10, Jalan Bukit, 43000 Kajang,
Selangor Darul Ehsan, Malaysia.
Tel: 603-87362337
Fax: 603-87362779
Website: www.dongzong.my
Email: support@dongzong.my

印刷：
Percetakan Advanco Sdn Bhd.

版次：
2018年8月第1版

印次：
2020年10月第3次印刷

编审团队

编 写 者：刘建华　张丽萍　张锦发　林美湘

学科顾问：刘建华　陈庆地　张丽萍

编审委员：陈玉丽　李鸿聪　张锦发　林汶良
姚和兴　萧子良　黎启春

责任编辑：张锦发

（按姓氏笔画顺序排列）

鸣　谢

本书承蒙编审小组、林美湘、洪燕芬、林艾嘉等提供建设性意见，并协助编写及审稿，谨此统致谢忱。

董教总华文独中工委会统一课程委员会　启
2018年8月

编辑说明

一、这套《初中数学》是根据董教总华文独中工委会统一课程委员会所拟定的数学课程标准编写而成。在拟订课程标准的过程中，也参考了我国教育部所颁布的中学新课程纲要及各国的课程标准和教材，并采用了旧版统一课本《初中数学》的课程内容。

二、这套《初中数学》沿用旧版《初中数学》的综合方式编写，全套教材共分六册，分三年使用。每册的内容是依据各年级每学年上课三十二周，每周上课六节，每节四十分钟的时间分配而编写，惟各校可按个别情况斟酌处理。

三、这套教材共有38章，内容包括算术、代数、几何、集合论及统计学。其内容除了衔接小学的课程之外，也作为日后跨上高中的基础教材。

四、本书是初三上册，供初中三年级上半年使用，内容包括：
代　数 —— 变数法、指数与对数
几　何 —— 相似形、立体图形、表面积与体积
统计学 —— 统计表与统计图、集中趋势与四分位数

五、本书设有“学习目标”，“注意”，“补充资料”，“思考题”及“随堂练习”栏目，目的在于使学生掌握学习的重点，厘清注意项目，启发思考能力，更增进学习的效果。

六、本书每节都设有习题，每一章后都设有总复习题，以巩固学生对于所学知识的理解。习题的答案都附于书末。此外，本书附有中英名词对照，供学习参考。

七、本书若有错误、疏漏或欠妥之处，祈望各校教师及读者予以指正，以供再版时修订参考。

董教总华文独中工委会统一课程委员会
《初中数学》编审小组
2018年8月

目录

1 变数法

1.1 正变 2
1.2 反变 7
1.3 联变 11

2 指数与对数

2.1 零指数幂与负整数指数幂 18
2.2 分数指数幂 23
2.3 简易指数方程式 31
2.4 对数的定义与性质 33

3 统计表与统计图

3.1 统计学的基本概念 50
3.2 频数分配表 51
3.3 统计图 59
3.4 累积频数分配表与累积频数多边形 84

4 集中趋势与四分位数

4.1 集中趋势 98
4.2 四分位数 112

目录

5 相似形

5.1 相似形 120

5.2 相似三角形的判定与应用 128

5.3 相似形的面积比 151

6 立体图形、表面积与体积

6.1 基本概念 164

6.2 表面积、体积及其单位的换算 166

6.3 平面展开图 176

6.4 棱柱 181

6.5 直圆柱 189

6.6 棱锥 195

6.7 直圆锥 201

6.8 球 207

名词对照 215

答案 217

1 变数法

学习目标

- 能解正变、反变及联变的问题



1 变数法

在某个变化过程中，当一个数量在变化时，另一个相关数量会依着某种关系随着变化。例如，以一定的速度所走过的路程，会因时间增长而增加；另外，完成一项工作，会因工人增加而使得工作时间减少。像这样研究两个或多个相关数量变化关系的问题，就称为变数法。

一般上变数法有以下三类：正变、反变及联变。

1.1 正变

如果一辆汽车以每小时90公里的速度行驶，那么距离 s 与行驶时间 t 的关系可以用下表来表示：

时间 t (小时)	1	2	3	4	5	…
距离 s (公里)	90	180	270	360	450	…

从表中可观察到，$\frac{s}{t}$ 的比值一直保持在90，即 $\frac{90}{1}=\frac{180}{2}=\frac{270}{3}=\frac{360}{4}=\frac{450}{5}=\cdots$，因此 s 与 t 的关系可写成 $s=90t$。当 t 改变时，s 也随着改变，并且保持在 t 值的90倍。我们就说 s 依 t 而正变，以 $s\propto t$ 来表示。

一般上，x 与 y 两个变量，当 x 改变时，y 也随着改变且保持在 x 值的 k 倍，我们就说 y 依 x 而正变，以 $y\propto x$ 来表示，即

> 若 $y\propto x$ （y 依 x 而正变）
> 则 $y=kx$ （k 是非零常数）

补充资料

若 y 依 x 而正变，则 x 也依 y 而正变。

图1-1所示为两个成正比的相关变量 y 与 x 的关系图，它是一条经过原点的直线。

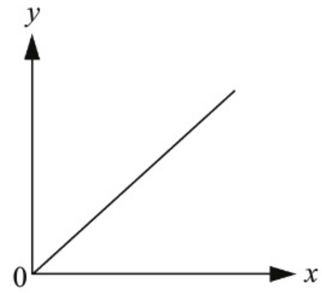


图1-1

例题 1

若 y 依 x 而正变，且 $x=5$ 时，$y=30$。

(a) 以 x 表示 y。

(b) 当 $x=20$ 时，求 y。

解： (a) $y \propto x$

$\therefore \quad y=kx$

将 $x=5$ 及 $y=30$ 代入，得

$30=k\times 5$

$k=6$

$\therefore \quad y=6x$

(b) 当 $x=20$ 时，$y=6\times 20$

$=120$

例题 2

已知y依x的平方而正变，当$x=4$时，$y=-32$。

(a) 求x与y的关系式。

(b) 当$y=-8$时，求x。

解： (a) $y \propto x^2$

$\therefore\ y = kx^2$

将$x=4$及$y=-32$代入，得

$-32 = k \times (4)^2$

$k = -2$

$\therefore\ y = -2x^2$

(b) 当$y=-8$时，

$-8 = -2x^2$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

例题 3

已知一柱体容器内水的体积V依水位高度h而正变。

若$h = 3\ \text{cm}$时，$V = 42\ \text{cm}^3$。

(a) 以h表示V。

(b) 当$h = 3.5\ \text{cm}$时，求容器内水的体积。

解： (a) $V \propto h$

$\therefore\ V = kh$

(续) 将 $h=3$ 及 $V=42$ 代入，得

$$42=k\times 3$$
$$k=14$$
$$\therefore\ V=14h$$

(b) 当 $h=3.5$ cm 时， $V=14\times 3.5$
$=49\ \text{cm}^3$

随堂练习 1

1. 已知 y 依 x 而正变，完成下表：

x		3	6	8	
y	6		24		40

2. 若 $y\propto x^3$，且当 $x=-2$ 时， $y=24$。
   (a) 以 x 表示 y。
   (b) 当 $x=4$ 时，求 y。
3. 美婷的工资 W 依工作时间 t 而正变。若美婷工作 6 小时的工资是 RM 160，
   (a) 以 t 表示 W。
   (b) 问她工作 15 小时的工资是多少？

练习 1.1

1. 若 V 依 h 而正变，且 $h=3.6$ 时， $V=18$。
   (a) 以 h 表示 V。
   (b) 当 $h=12.6$ 时，求 V。
   (c) 当 $V=24$ 时，求 h。

2. 已知 y 依 x 的算数平方根而正变，完成下表：

x	4	9	
y	6		15

3. 已知 y 依 x 的平方而正变，且 $x=2$ 时，$y=-2$。
   (a) 以 x 表示 y。
   (b) 当 $x=8$ 时，求 y。
   (c) 当 $y=-18$ 时，求 x。
4. 设 y 依 $(x-1)^2$ 而正变，当 $x=4$ 时，$y=18$。
   (a) 求 x 与 y 的关系式。
   (b) 当 $x=5$ 时，求 y。
   (c) 当 $y=8$ 时，求 x。
5. 已知薯片所含的热量 C 依薯片的重量 W 而正变，若 250 g 的薯片中含 1500 kcal的热量。
   (a) 求C与W的关系式。
   (b) 若小美想摄取 300 kcal 的热量，问她该吃多少克的薯片？
6. 物体由静止自由落下的距离，依其时间的平方而正变。已知一物体由静止开始落下，2 秒后落下 19.6 公尺，问 5 秒后落下了多少公尺？
7. 一辆汽车以匀速行驶，其所花的时间 t 依行驶的距离 s 而正变。
   (a) 求 s 与 t 的关系式。
   (b) 若行驶 150 公里所花的时间为 $2\frac{1}{2}$ 小时，问行驶 240 公里需多少小时？
8. 某人每年捐给慈善机构的款额是依据他的收入而正变。已知他前年的收入是 RM 90000，而去年的收入是 RM 160000，若他在去年的捐款比前年多RM 3500，问他去年的捐款是多少?

1.2 反变

一辆汽车从甲地开往距离为 360 公里外的乙地，其行驶的时间 t 和速度 v 的关系可以用下表来表示：

速度 v (公里/小时)	30	60	90	120	…
时间 t (小时)	12	6	4	3	…

从表中可观察到，v 与 t 的乘积一直保持在 360，即 $30\times12=60\times6=90\times4=120\times3=\cdots$，也就是说 v 与 t 存在着以下的关系：

$$vt=360$$

$$t=360\times\frac{1}{v}$$

因此 v 与 t 的关系可以写为 $t=\frac{360}{v}$。当 v 改变时，t 也随着变动，并且保持在 $\frac{1}{v}$ 的 360 倍。我们就说 t 依 v 而反变，以 $t\propto\frac{1}{v}$ 来表示。

一般上，x 与 y 两个变量，当 x 改变时，y 也随着改变且保持在 $\frac{1}{x}$ 值的 k 倍，我们就说 y 依 x 而反变，以 $y\propto\frac{1}{x}$ 来表示，即

> 若 $y\propto\frac{1}{x}$ （y 依 x 而反变）
>
> 则 $y=\frac{k}{x}$ （k 是非零常数）

补充资料

若 y 依 x 而反变，表示 y 依 $\frac{1}{x}$ 而正变。

图 1-2 所示为两个成反比的相关变量 y 与 x 的关系图。

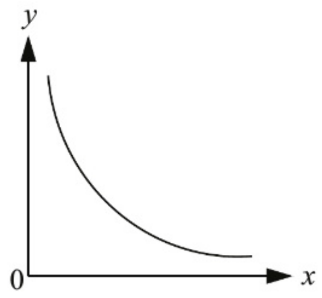


图1-2

例题 1

已知 y 依 $\sqrt{x}$ 而反变，且当 $x=4$ 时， $y=5$。

(a) 以 x 表示 y。

(b) 当 $x=\frac{1}{4}$ 时，求 y。

解： (a) $y \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$

$y=\frac{k}{\sqrt{x}}$

将 $x=4$， $y=5$ 代入，得

$5=\frac{k}{\sqrt{4}}$

$k=10$

$\therefore\ y=\frac{10}{\sqrt{x}}$

(b) 当 $x=\frac{1}{4}$ 时， $y=\frac{10}{\sqrt{\frac{1}{4}}}$

$=10\times 2$

$=20$

例题 2

已知圆柱体的体积不变，它的底面积 S 依高 h 而反变。

当 $h = 12.5$ cm 时，$S = 20\ \text{cm}^2$。

(a) 以 h 表示 S。

(b) 当 $h = 5$ cm 时，求 S。

解： (a) 圆柱的体积不变时，即

$$S \propto \frac{1}{h}$$

$$S = \frac{k}{h}$$

将 $h = 12.5$，$S = 20$ 代入，得

$$20 = \frac{k}{12.5}$$

$$k = 250$$

$$\therefore \quad S = \frac{250}{h}$$

(b) 当 $h = 5$ cm 时，$S = \dfrac{250}{5}$

$= 50\ \text{cm}^2$

随堂练习 2

1. 已知 y 依 x 而反变，完成下表：

x	0.6	0.9		6	9
y		20	6		

2. 若 $y \propto \frac{1}{x^2}$，且当 $x=1$ 时， $y=16$。

   (a) 以 x 表示 y。

   (b) 当 $x=2$ 时，求 y。

练习 1.2

1. 已知 y 依 x 而反变，且当 $x=4$ 时， $y=2$。
   (a) 以 x 表示 y。
   (b) 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，求 y。
   (c) 当 $y=10$ 时，求 x。
2. 已知 x 依 $\sqrt[3]{y}$ 而反变，且当 $x=2$ 时， $y=216$。当 $y=64$ 时，求 x 的值。
3. 如果 $(y+1)$ 依 x^2 而反变，且当 $x=2$ 时， $y=3$。
   (a) 求 y 与 x^2 的关系式。
   (b) 当 $x=5$ 时，求 y。
   (c) 当 $y=8$ 时，求 x。
4. 某工程完工的天数 y 依工人数量 x 而反变。若此工程由 90 人做，30 天可完成。
   (a) 求 x 与 y 的关系式。
   (b) 若由 18 人做，问几天可完成？
5. 一辆汽车以每小时 v km 的速度由甲地行驶至乙地，耗时 t 小时；且当 $v=80$ 时，$t=3$。
   (a) 若该汽车以每小时 96 km 的速度行驶，则从甲地到乙地需多少时间？
   (b) 若该汽车耗时 4 小时由甲地行驶至乙地，则行驶的速度是多少？
6. 已知 x 块边长为 a cm 的正方形洋灰板足以覆盖一片长方形的草地。若该草地需用 1200 块边长为 30 cm 的正方形洋灰板来覆盖，
   (a) 写出 x 与 a 的关系式。
   (b) 若以边长为 50 cm 的正方形洋灰板来覆盖同一片草地，问需用多少块洋灰板？
   (c) 若要用 675 块正方形洋灰板覆盖上述草地，问每块洋灰板的边长是多少？

1.3 联变

一个变量 z 会随着另两个变量 x 与 y 而改变时，我们就说 z 依 x 与 y 而联变。例如，圆柱体的体积 $V=\pi r^2 h$，当圆柱的高 h 固定时，体积 V 将依着半径 r 的平方而正变。若圆柱的底面半径 r 固定时，体积 V 将依其高 h 而正变。而当高 h 与半径 r 同时变化时，则体积 V 将依着半径 r 的平方及高 h 而改变，我们就称 V 依 r^2 及 h 而联变。

一般上，联变有以下三种情形：

(1) z 依 x 而正变，也依 y 而正变，

即 $z \propto xy$

$z = kxy$，k 是非零常数

(2) z 依 x 而正变，且依 y 而反变，

即 $z \propto \dfrac{x}{y}$

$z = \dfrac{kx}{y}$，k 是非零常数

(3) z 依 x 而反变，也依 y 而反变，

即 $z \propto \dfrac{1}{xy}$

$z = \dfrac{k}{xy}$，k 是非零常数

同样的，一个变量 z 也可依两个以上的变量而改变。

例题 1

若 z 依 y^2 而正变，依 x 而反变，且当 $y=2$， $x=3$ 时，$z=24$。

(a) 以 x 及 y 表示 z。

(b) 当 $y=\frac{1}{2}$， $x=-1$ 时，求 z。

解： (a)

$$z \propto \frac{y^2}{x}$$

$$\therefore \quad z=\frac{ky^2}{x}$$

将 $y=2$， $x=3$ 及 $z=24$ 代入，得

$$24=\frac{k\times(2)^2}{3}$$

$$k=18$$

$$\therefore \quad z=\frac{18y^2}{x}$$

(b) 当 $y=\frac{1}{2}$， $x=-1$ 时，

$$z=\frac{18\left(\frac{1}{2}\right)^2}{-1}$$

$$=-\frac{9}{2}$$

例题 2

若 4 名工人工作 5 天的工资是 RM 840。问 7 名工人工作 20 天的工资是多少？

解： 设人数为 x，天数为 y，工资为 z。

则 $z \propto xy$

$z = kxy$

当 $x = 4$，$y = 5$ 时，$z = 840$，

$840 = k \times 4 \times 5$

$k = 42$

$\therefore\ z = 42xy$

当 $x = 7$，$y = 20$ 时，$z = 42 \times 7 \times 20$

$= 5880$

$\therefore$ 7 名工人工作 20 天的工资是 RM 5880。

思考题

在例题 2 中，常数 k 有什么意义？

随堂练习 3

1. 若 z 依 x 而正变，依 y 而反变。当 $x = 10$ 及 $y = 14$ 时，$z = 14$。当 $x = 45$，$z = 49$ 时，求 y。
2. 若 z 依 x^2 而正变，依 y^5 而反变，完成下表：

x	2	3	
y	1	2	-1
z	12		-27

3. 已知电阻 R 依电线的长度 l 而正变，同时也依其横截面的直径 d 的平方而反变。已知 $l = 100$ m，$d = 1$ mm 时，$R = 560\ \Omega$。当 $R = 700\ \Omega$，$l = 180$ m 时，求 d。

练习 1.3

1. 若 $x \propto yz$，且当 $y=-2$，$z=3$ 时，$x=30$。当 $y=4$，$x=80$ 时，求 z。
2. 若 $w \propto \frac{x}{y}$，且当 $x=2$，$y=8$ 时，$w=\frac{3}{2}$。当 $w=\frac{6}{5}$，$x=3$ 时，求 y。
3. 若 w 依 x^2 而正变，依 y 而反变，求表中的 p。

w	4	$\frac{2}{3}$
x	2	-4
y	6	p

4. 已知 y 依 x^2 而正变，依 $\sqrt[3]{z}$ 而反变。若当 $x=2$，$z=27$ 时，$y=8$。当 $x=-1$，$z=64$ 时，求 y。
5. 已知 $y \propto x$ 及 $y \propto \frac{1}{z}$，求表中 p 与 q 的值。

x	2	p	6
y	10	24	q
z	6	5	10

6. 汶良用 RM 1000 的工资请 5 名工人工作 5 天。若他付 RM 1400 的工资，问可以请 7 名工人工作多少天？
7. 圆柱的体积 V 依其底面半径 r 的平方及高 h 而正变。若高是 7 cm，半径是 2 cm，体积是 88 cm^3。若体积是 5346 cm^3，半径是 9 cm，求圆柱的高。

总复习题 1

1. 如果 y 依 $\frac{1}{x}$ 而正变，且当 $x=3$ 时，$y=2$。

   (a) 以 x 表示 y。

   (b) 当 $x=8$ 时，求 y。

2. 观察下表，写出 s 与 t 的一个关系式。

t	0	1	2	3
s	0	5	20	45

3. 若 x 依 $\sqrt{y}$ 而正变，且 $y=r+2$。当 $r=2$ 时，$x=12$。以 y 表示 x。

4. 若 w 依 x 而反变，且当 $x=7$ 时，$w=14$。以 x 表示 w。

5. 已知 y 依 $\sqrt{2x-3}$ 而反变，且当 $x=3\frac{1}{2}$ 时，$y=1$。

   (a) 以 x 表示 y。

   (b) 当 $x=6$ 时，求 y。

   (c) 当 $y=\frac{1}{2}$ 时，求 x。

6. 已知 p 依 q 的立方而正变，依 r 的平方根而反变。当 $q=3$，$r=4$ 时，$p=81$。当 $q=2$，$r=9$ 时，求 p。

7. 已知 $y \propto x^2$ 及 $y \propto \frac{1}{z}$，求表中 m 的值。

x	3	5
y	18	m
z	2	4

8. 已知 r 依 S 而正变，依 $\sqrt{t}$ 而反变，且当 $S=3$，$t=4$ 时，$r=6$。

   (a) 当 $S=7$，$t=16$ 时，求 r。

   (b) 当 $S=8$，$r=24$ 时，求 t。

9. 一已知质量的气体在固定温度下，其压强 P 与体积 V 可用波义耳定律表示：$PV=k$，k 为一常数。当 $V=40\ \text{cm}^3$ 时，$P=51\ \text{Pa}$。当 $V=50\ \text{cm}^3$ 时，求 P。
10. 圆柱的侧面面积 A 依其底面半径 r 与高 h 而正变。若高是 7 cm，半径是 2 cm，侧面面积是 $88\ \text{cm}^2$。若侧面面积是 $198\ \text{cm}^2$，高是 21 cm，求圆柱的底面半径。
11. 气体的体积 V 依绝对温度 T 而正变，同时依压强 P 而反变。某气体在绝对温度 270 度，压强为 30 个大气压时，体积为 $72\ \text{cm}^3$。问这气体在绝对温度 400度，压强为 40 个大气压时，体积是多少？

2 指数与对数

学习目标

- 理解零指数幂、负整数指数幂及分数指数幂的定义
- 掌握指数的运算法则
- 能解简易指数方程式
- 了解对数的定义及掌握对数的运算法则



在初中二上册，我们学过了正整数指数幂及以下的运算法则：

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$
3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$

以下我们将学习指数是零、负整数及分数时，幂的意义及其运算法则。

2.1 零指数幂与负整数指数幂

零指数幂的定义及运算

我们知道，$2^3 \div 2^3 = 1$

$a^5 \div a^5 = 1 \quad (a \neq 0)$

为了使 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 在当 $m = n$ 时也能成立，

而我们已经知道，$2^{3-3} = 1$

$a^{5-5} = 1 \quad (a \neq 0)$

因此，我们定义

$$a^0 = 1 (a \neq 0)$$

注意

零的零次方，即 0^0 没有意义。

例题 1

求下列各式的值：

(a) 6^0　　　　(b) $\left(\frac{1}{5}\right)^0$

(c) $(-1234)^0=1$　　　　(d) $(-0.3)^0$

解： (a) $6^0=1$

(b) $\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$

(c) $(-1234)^0=1$

(d) $(-0.3)^0=1$

负整数指数幂的定义及运算

我们知道，$5^2\div5^5=\dfrac{5\times5}{5\times5\times5\times5\times5}=\dfrac{1}{5^3}$

$$a^3\div a^5=\frac{a\times a\times a}{a\times a\times a\times a\times a}=\frac{1}{a^2}\qquad(a\neq0)$$

为了使 $a^m\div a^n=a^{m-n}$ 在当 $m<n$ 时也能成立，

而我们已经知道 $5^{-3}=\dfrac{1}{5^3}$

$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}\qquad(a\neq0)$$

因此，我们定义

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\qquad(a\neq0,\ n\text{为正整数})$$

注意

零的负整数指数幂没有意义。

补充资料

a^{-1}就是 a 的倒数，即 $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$。

例题 2

将下列各数化为分数：

(a) 5^{-1}　　(b) 4^{-3}　　(c) -7^{-2}　　(d) $(-2)^{-4}$

解： (a) $5^{-1}=\dfrac{1}{5}$

(b) $4^{-3}=\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{1}{64}$

(c) $-7^{-2}=-\dfrac{1}{7^2}=-\dfrac{1}{49}$

(d) $(-2)^{-4}=\dfrac{1}{(-2)^4}=\dfrac{1}{16}$

例题 3

计算下列各式：

(a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$　　(b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$　　(c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$

解： (a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)}=4$

(b) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{9}{4}$

(c) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^3}=\dfrac{125}{27}$

补充资料

$\because \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{n}$，

因此例题 3(b) 也可以有以下的做法：

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2}=\dfrac{9}{4}$

有了零指数幂与负整数指数幂的定义之后，就可以将指数从正整数推广到整数，正整数指数幂的运算法则对整数指数幂也都适用。例如，

$$a^5 \times a^0 = a^{5+0} = a^5$$

$$b^{-5} \times b^2 = b^{-5+2} = b^{-3} = \frac{1}{b^3}$$

$$\left(c^{-2}\right)^3 = c^{-2\times 3} = c^{-6} = \frac{1}{c^6}$$

例题 4

化简下列各式：

(a) $a^3 \times a^{-3}$　(b) $a^{-8} \div a^{-7}$　(c) $\left(a^2 \times a^{-5}\right)^2$

解： (a) $a^3 \times a^{-3} = a^{3+(-3)}$

$$= a^0$$

$$= 1$$

(b) $a^{-8} \div a^{-7} = a^{-8-(-7)}$

$$= a^{-1}$$

$$= \frac{1}{a}$$

(c) $\left(a^2 \times a^{-5}\right)^2 = \left(a^{2+(-5)}\right)^2$

$$= \left(a^{-3}\right)^2$$

$$= a^{-6}$$

$$= \frac{1}{a^6}$$

例题 5

计算下列各式：

(a) $2^{-2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^0$　　(b) $\left(3^{-2}\right)^3\times\left(3^{-3}\right)^{-2}$　　(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-1^8+(-1)^9$

解： (a) $2^{-2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^0=\frac{1}{4}\times1$

$=\frac{1}{4}$

(b) $\left(3^{-2}\right)^3\times\left(3^{-3}\right)^{-2}=3^{-6}\times3^6$

$=\frac{1}{3^6}\times3^6$

$=1$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-1^8+(-1)^9=2^3-1-1$

$=6$

随堂练习 1

1. 计算下列各式：

(a) 3^{-4}　　(b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$　　(c) $(-13)^0$

(d) $(-2)^{-5}$　　(e) $7^{-8}\div7^{-10}$　　(f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^0$

2. 化简下列各式：

(a) $x^7\times x^0$　　(b) $x^{-5}\div x^5$　　(c) $a^4\times a^7\div a^5$

(d) $\left(a^{-2}\right)^7\times a^4$　　(e) $\frac{6b^3}{2b^5}$　　(f) $\frac{\left(2a^2b^2\right)^3}{a^2b^7}$

练习 2.1

1. 计算下列各式：

(a) 7^{-3} (b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ (c) $(-132)^{0}$

(d) $(-2)^{-4}$ (e) $(-3)^{-3}$ (f) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}\times 49^{-1}$

(g) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-7}\div\left(\frac{3}{5}\right)^{-6}$ (h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\times(-2)^{-1}\div(-2)^{-2}$

(i) $(-4)^{-2}\times\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\div 4^{-1}\right]$

2. 化简下列各式：

(a) $a^{8}\times a^{0}$ (b) $a^{-10}\times a^{9}$ (c) $x^{-2}\div x^{-2}$

(d) $x^{3}\times x^{-7}$ (e) $\left(x^{-3}\right)^{2}\div x^{-5}$ (f) $\left(a^{3}\right)^{3}\times a^{-4}\div\left(a^{6}\right)^{2}$

(g) $\left(2a^{-3}\right)^{5}\times 2a^{4}$ (h) $\frac{-4a^{3}b^{2}}{32a^{4}b^{-5}}$ (i) $\frac{(2x)^{3}\times\left(5x^{2}\right)^{-2}}{5x^{0}}$

2.2 分数指数幂

$\because\ \sqrt{3}\times\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^{2}=3$，

又 $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5}=\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3}=5$，

$\therefore\ \underbrace{\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{a}\times\cdots\times\sqrt[n]{a}}_{n\text{个}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a$。

为了使$\left(a^m\right)^n=a^{m\times n}$在当$m$，$n$是分数时也能成立，

即 $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2=3^{\frac{1}{2}\times 2}=3$，

又 $\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2=3$

因此，我们定义

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ (a>0\text{，}n\text{为正整数且}n>1)$$

$$\therefore\ \left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{1}{n}\times m}=a^{\frac{m}{n}}\text{。}$$

即

$$a^{\frac{m}{n}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\ (a>0\text{，}m\text{，}n\text{都是正整数且}n>1)$$

若分数指数是负数，其运算法则与负整数指数幂的运算法则相同，即

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

$$(a>0\text{，}m\text{，}n\text{都是正整数且}n>1)$$

注意

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

补充资料

0的正分数指数幂等于0，而0的负分数指数幂没有意义。

例题 1

以指数式表示下列各式:

(a) $\dfrac{3}{x^4}$　　(b) $\dfrac{1}{4x}$

(c) $\sqrt{x^5y^3}$　　(d) $\dfrac{5}{\sqrt{16x^3}}$

解: (a) $\dfrac{3}{x^4}=3x^{-4}$

(b) $\dfrac{1}{4x}=\dfrac{1}{4}x^{-1}$

(c) $\sqrt{x^5y^3}=x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{3}{2}}$

(d) $\dfrac{5}{\sqrt{16x^3}}=\dfrac{5}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

例题 2

以根式表示下列各式:

(a) $x^{\frac{3}{5}}$　　(b) $x^{-\frac{1}{3}}$

(c) $3x^{-\frac{1}{2}}y$　　(d) $\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

解: (a) $x^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{x^3}$

(b) $x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) $3x^{-\frac{1}{2}}y=\dfrac{3y}{\sqrt{x}}$

(d) $\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

例题 3

计算下列各式：

(a) $121^{\frac{1}{2}}$　　(b) $4^{\frac{5}{2}}$

(c) $16^{\frac{1}{4}}$　　(d) $27^{\frac{2}{3}}$

解： (a)
$$\begin{aligned}121^{\frac{1}{2}} &= \left(11^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= 11\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}4^{\frac{5}{2}} &= \left(2^2\right)^{\frac{5}{2}}\\ &= 2^5\\ &= 32\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}16^{\frac{1}{4}} &= \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}}\\ &= 2\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}27^{\frac{2}{3}} &= \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}\\ &= 3^2\\ &= 9\end{aligned}$$

注意

例题 3 (a) 也可以有以下的做法：

$$\begin{aligned}121^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{121}\\ &= 11\end{aligned}$$

例题 4

计算下列各式：

(a) $16^{-\frac{3}{2}}$　　(b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(c) $8^{-\frac{2}{3}}$　　(d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$

解： (a) $16^{-\frac{3}{2}}=\left(4^{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$
$=4^{-3}$
$=\frac{1}{64}$

(b) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{-\frac{1}{2}}$
$=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$
$=\frac{2}{3}$

(c) $8^{-\frac{2}{3}}=\left(2^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$
$=2^{-2}$
$=\frac{1}{4}$

(d) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^{-\frac{2}{3}}$
$=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
$=\frac{9}{4}$

注意

例题 4 (a) 也可以有以下的做法：

$16^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{16^{\frac{3}{2}}}$
$=\frac{1}{\left(\sqrt{16}\right)^{3}}$
$=\frac{1}{4^{3}}$
$=\frac{1}{64}$

随堂练习 2

1. 以指数式表示下列各式：

(a) $4\sqrt{x}$　　(b) $\left(\sqrt{x}\right)^{3}$　　(c) $\sqrt{\frac{1}{xy}}$　　(d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. 以根式表示下列各式：

(a) $x^{-\frac{3}{4}}$ (b) $(3x)^{-\frac{1}{2}}$ (c) $5x^{-\frac{1}{3}}y^2$ (d) $\left(\frac{4}{9}x^{-2}y^3\right)^{-\frac{1}{2}}$

3. 计算下列各式：

(a) $0.125^{\frac{1}{3}}$ (b) $9^{-\frac{3}{2}}$ (c) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}}$ (d) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$

练习 2.2a

1. 以指数式表示下列各式：

(a) $2\sqrt{x^3}$ (b) $\frac{2}{\sqrt[4]{xy^2}}$ (c) $\sqrt{\frac{1}{x^4y}}$ (d) $\frac{8}{\sqrt{9x^2y}}$

2. 以根式表示下列各式：

(a) $x^{-\frac{5}{4}}$ (b) $\left(\frac{1}{125}x\right)^{-\frac{1}{3}}$ (c) $7x^{-3}y^{-\frac{1}{3}}$ (d) $\left(\frac{8}{729}x^3y^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

3. 计算下列各式：

(a) $25^{\frac{3}{2}}$ (b) $0.09^{\frac{3}{2}}$ (c) $81^{-\frac{3}{4}}$ (d) $\left(3^{-18}\right)^{\frac{1}{6}}$

(e) $\left(12\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ (f) $\left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (g) $216^{-\frac{1}{3}}$ (h) $\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$

当指数 m 及 n 为分数时，以下的运算法则仍然成立。

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$
4. $(ab)^n = a^nb^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

例题 5

化简下列各式：

(a) $a^{\frac{2}{5}}\times a^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{15}}$　　(b) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12}\times\left(a^{6}b^{-9}\right)^{-\frac{2}{3}}$

解： (a)
$$\begin{aligned}a^{\frac{2}{5}}\times a^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{15}} &= a^{\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{15}\right)}\\ &= a^{\frac{6}{15}-\frac{5}{15}-\frac{1}{15}}\\ &= a^{0}\\ &= 1\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12}\times\left(a^{6}b^{-9}\right)^{-\frac{2}{3}} &= a^{4}\times\left(a^{-4}b^{6}\right)\\ &= a^{0}b^{6}\\ &= b^{6}\end{aligned}$$

例题 6

化简 $\left(a^{x}\right)^{y-z}\left(a^{y}\right)^{z-x}\left(a^{z}\right)^{x-y}$。

解：
$$\begin{aligned}\left(a^{x}\right)^{y-z}\left(a^{y}\right)^{z-x}\left(a^{z}\right)^{x-y} &= a^{xy-xz}a^{yz-xy}a^{xz-yz}\\ &= a^{xy-xz+yz-xy+xz-yz}\\ &= a^{0}\\ &= 1\end{aligned}$$

例题 7

计算 $2^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{3}{2}}\times 16^{-\frac{1}{2}}$。

解： $2^{\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{3}{2}}\times 16^{-\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times\left(2^{3}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(2^{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$=2^{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}-2}$

$=2^{3}$

$=8$

随堂练习 3

1. 化简下列各式：

(a) $a^{\frac{4}{5}}\times a^{\frac{6}{15}}\div a^{\frac{1}{3}}$　(b) $\left(x^{\frac{1}{4}}y^{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(xy^{\frac{3}{4}}\right)^{2}$　(c) $\dfrac{2^{n-2}\times 2^{n+2}}{4^{-n}}$

2. 计算下列各式：

(a) $2^{-\frac{1}{5}}\times\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{-2}\div 4$　(b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{0}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$　(c) $5^{\frac{1}{2}}\times 15^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{5}{2}}$

练习 2.2b

1. 化简下列各式：

(a) $4^{2n}\div 2^{3n}$　(b) $12^{3m}\div 2^{3m}\times 9^{-2m}$　(c) $5^{2n+1}\times 5^{n-1}\div 25^{n}$

(d) $\left(3^{n}\times 9^{n}\times 27^{n}\right)^{\frac{1}{n}}$　(e) $\left(8a^{3}b^{5}\right)^{-\frac{1}{3}}\times\left(a^{\frac{1}{2}}b\right)^{4}$　(f) $\dfrac{5^{2n+1}\times 5^{n-1}}{25^{n+1}}$

2. 计算下列各式：

(a) $2\times\left(2^{3}\right)^{2}$

(b) $125^{\frac{2}{3}}\times625^{\frac{1}{4}}$

(c) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{3}{4}}\times\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{3}{4}}$

(d) $2^{-\frac{1}{5}}\times\left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{-2}$

(e) $2^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{4}{3}}\div6^{-\frac{2}{3}}$

(f) $27^{\frac{1}{2}}\times45^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{1}{6}}\times5^{\frac{1}{3}}$

(g) $(-3)^{3}+(-3)^{-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}$

(h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

2.3 简易指数方程式

指数含有未知数的方程式就叫做指数方程式。例如，$2^{x}=16$，$3^{x-2}=9^{x+1}$ 都是指数方程式，本节只介绍可化成同底的指数方程式的解法。

例题 1

解下列指数方程式：

(a) $3^{2x}=3^{4}$

(b) $8^{x}=32$

解： (a)

$$3^{2x}=3^{4}$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

(b)

$$8^{x}=32$$
$$2^{3x}=2^{5}$$
$$3x=5$$
$$x=\frac{5}{3}$$

例题 2

解指数方程式$3^{2x}\cdot 9^{x-1}=27$。

解：

$$
\begin{aligned}
3^{2x}\cdot 9^{x-1}&=27\\
3^{2x}\cdot\left(3^{2}\right)^{x-1}&=3^{3}\\
3^{2x}\cdot 3^{2x-2}&=3^{3}\\
3^{4x-2}&=3^{3}\\
4x-2&=3\\
4x&=5\\
x&=\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

例题 3

解指数方程式$2^{x}+3\left(2^{x}\right)-32=0$。

解：

$$
\begin{aligned}
2^{x}+3\left(2^{x}\right)-32&=0\\
2^{x}\left(1+3\right)&=32\\
2^{x}&=8\\
x&=3
\end{aligned}
$$

随堂练习 4

解下列指数方程式：

1. $16^{x}=8$
2. $5^{2x-1}=1$
3. $\frac{\left(9^{x}\right)^{2}}{27^{x}}=9$
4. $2^{x}\cdot 4^{x-1}=8^{2x-1}$
5. $2^{x^{2}+3}-4^{2x}=0$
6. $5^{x-1}+5^{x-2}=6$

练习 2.3

解下列指数方程式：

1. $2^{-x}=16$
2. $0.01^{x}=1000$
3. $3^{x}=81$
4. $8^{x}=128$
5. $3^{2x-1}=1$
6. $2^{x+3}=4^{2x}$
7. $9^{x-3}=27^{x+1}$
8. $9^{x}\cdot 3^{x-1}=81$
9. $4^{x+1}=8\times 2^{x+2}$
10. $\frac{1}{4}\left(2^{2x+3}\right)=16^{x-2}$
11. $\frac{9^{x}}{3^{x-1}}=27^{2-x}$
12. $27^{x}\cdot 2^{3x}=6$
13. $9^{x}-9\sqrt{3}=0$
14. $5^{x^2}-25^{6-2x}=0$
15. $5^{x+1}\times 25^{1-2x}=125^{x}$
16. $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$

2.4 对数的定义与性质

对数的定义

我们知道，2 的 3 次幂等于 8，可以写成 $2^3=8$，其中 2 是底数，3 是指数。然而，当我们要计算 8 是 2 的多少次幂时，就必须要引进对数的概念。因为 8 是 2 的 3 次幂，我们以符号 $\log_2 8=3$ 来表示以上的关系，读作以 2 为底，8 的对数是 3。

同理，$10^2=100$ 则 $\log_{10}100=2$

$5^{-2}=\frac{1}{25}$ 则 $\log_5\frac{1}{25}=-2$

$16^{\frac{1}{2}}=4$ 则 $\log_{16}4=\frac{1}{2}$

补充资料

对数的英文名词是 logarithm，“log”为其缩写。

若 $a^n=x\,(a>0,\ a\neq 1)$，则 $\log_a x=n$，读作以 a 为底，x 的对数是 n。a 叫做底数，x 叫做真数。反之，若 $\log_a x=n$，则 $a^n=x$。这就是对数式与指数式之间的互换关系，即

$$a^n=x \Leftrightarrow \log_a x=n\ (a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$$

在实数的范围内，正数的幂都是正数。因此，在 $a^n=x$ 中，因为 a 是不等于 1 的正数，所以对于任何实数 n，x 都是正数。

由于我们常用的记数制是十进制，因此以10为底数的对数也叫做常用对数。在表示常用对数时，常把底数10略去，即将 $\log_{10} x$ 写成 $\log x$ 或 $\lg x$。

补充资料

“$\Leftrightarrow$”代表左右两边的式子有互换的关系。在数学上我们读作“若且唯若”。

注意

零与负数的对数没有意义。

例题 1

将下列各指数式写成对数式：

(a) $4^3=64$　　(b) $3^{-2}=\dfrac{1}{9}$　　(c) $10^{-3}=0.001$

解： (a) $\log_4 64=3$

(b) $\log_3 \dfrac{1}{9}=-2$

(c) $\log_{10} 0.001=-3$

例题 2

将下列对数式写成指数式：

(a) $\log_5 625 = 4$ (b) $\log_4 8 = \frac{3}{2}$ (c) $\log_{10} 0.1 = -1$

解：(a) $5^4 = 625$

(b) $4^{\frac{3}{2}} = 8$

(c) $10^{-1} = 0.1$

例题 3

若 $\log_4 x = -2$，求 x。

解：

$$\log_4 x = -2$$
$$x = 4^{-2}$$
$$= \frac{1}{16}$$

例题 4

若 $\log_x \frac{8}{27} = 3$，求 x。

解：

$$\log_x \frac{8}{27} = 3$$
$$x^3 = \frac{8}{27}$$
$$x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$$
$$= \frac{2}{3}$$

例题 5

求 $\log_{81} 9$ 的值。

解： 设 $x = \log_{81} 9$

则 $81^x = 9$

$9^{2x} = 9$

$x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_{81} 9 = \dfrac{1}{2}$

随堂练习 5

1. 将下列各指数式写成对数式：

(a) $2^{-5} = \dfrac{1}{32}$　　(b) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

2. 将下列各对数式写成指数式：

(a) $\log_3 81 = 4$　　(b) $\log_7 \dfrac{1}{343} = -3$　　(c) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$

3. 下列各式中，求 x：

(a) $\log_x 3 = 1$　　(b) $\log_{25} x = \dfrac{3}{2}$　　(c) $\log_{81} 3 = x$

4. 求下列各式的值：

(a) $\log_{36} 216$　　(b) $\log_{27} \dfrac{1}{9}$

练习 2.4a

1. 将下列各指数式写成对数式:

(a) $8^3=512$

(b) $3^{-4}=\frac{1}{81}$

(c) $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

(d) $729^{\frac{1}{3}}=9$

2. 将下列各对数式写成指数式:

(a) $\log_a b=c$

(b) $\log_2 64=6$

(c) $\log_{\frac{1}{3}} a=6$

(d) $\log_{64} 4=\frac{1}{3}$

3. 下列各式中，求 x:

(a) $\log_4 x=2$

(b) $\log_x \sqrt{8}=\frac{3}{2}$

(c) $\log_4\left(8\sqrt{2}\right)=x$

(d) $\log_x 2=0.5$

4. 求下列各式的值:

(a) $\log_9 243$

(b) $\log_{64}\frac{1}{2}$

(c) $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$

(d) $\log_{\frac{1}{8}}\left(16\sqrt{2}\right)$

底的对数

$\because\ 3^1=3$,

$\therefore\ \log_3 3=1$。

同理，$a^1=a$，所以我们得到

$$\log_a a=1\ (a>0,\ a\neq 1)$$

1 的对数

$\because \quad 3^0 = 1$，

$\therefore \quad \log_3 1 = 0$。

同理，$a^0 = 1$，所以我们得到

$$\log_a 1 = 0 \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

积与商的对数

若 a，x 与 y 是正数，且 $x = a^p$，$y = a^q$，那么

$\log_a x = p$，$\log_a y = q$

$$\begin{aligned} xy &= a^p \times a^q \\ &= a^{p+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \log_a (xy) &= p + q \\ &= \log_a x + \log_a y \end{aligned}$$

即

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= a^p \div a^q \\ &= a^{p-q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \log_a \frac{x}{y} &= p - q \\ &= \log_a x - \log_a y \end{aligned}$$

即

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

例题 6

已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$， $\log_{10} 3 = 0.4771$， 求下列各式的值：

(a) $\log_{10} 6$　　(b) $\log_{10} 30$　　(c) $\log_{10} 60$

解： (a)
$$\begin{aligned}\log_{10} 6 &= \log_{10}(2\times 3)\\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3\\ &= 0.3010 + 0.4771\\ &= 0.7781\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\log_{10} 30 &= \log_{10}(3\times 10)\\ &= \log_{10} 3 + \log_{10} 10\\ &= 0.4771 + 1\\ &= 1.4771\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\log_{10} 60 &= \log_{10}(2\times 3\times 10)\\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 10\\ &= 0.3010 + 0.4771 + 1\\ &= 1.7781\end{aligned}$$

补充资料

当 $1 < x < 10$，
$\lg 1 < \lg x < \lg 10$，
即 $0 < \lg x < 1$。
这结果我们可以从计算机取得。

例题 7

已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$， $\log_{10} 3 = 0.4771$， 求下列各式的值：

(a) $\log_{10} \dfrac{2}{3}$　　(b) $\log_{10} 0.5$　　(c) $\log_{10} 15$

解： (a)
$$\begin{aligned}\log_{10} \frac{2}{3} &= \log_{10} 2 - \log_{10} 3\\ &= 0.3010 - 0.4771\\ &= -0.1761\end{aligned}$$

(b) $\log_{10} 0.5 = \log_{10} \frac{1}{2}$

$= \log_{10} 1 - \log_{10} 2$

$= 0 - 0.3010$

$= -0.3010$

(c) $\log_{10} 15 = \log_{10} \left(\frac{3 \times 10}{2} \right)$

$= \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2$

$= 0.4771 + 1 - 0.3010$

$= 1.1761$

例题 8

已知 $s = \log_a x$， $t = \log_a y$， $u = \log_a z$， 以 s， t 及 u 表示下列各式：

(a) $\log_a (xyz)$ (b) $\log_a \frac{az}{y}$ (c) $\log_a \frac{xy}{az}$

解： (a) $\log_a (xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$

$= s + t + u$

(b) $\log_a \frac{az}{y} = \log_a a + \log_a z - \log_a y$

$= 1 + u - t$

(c) $\log_a \frac{xy}{az} = \log_a x + \log_a y - \log_a a - \log_a z$

$= s + t - 1 - u$

随堂练习 6

1. 已知 $\log_7 2 = 0.3562$， $\log_7 3 = 0.5646$， 求下列各式的值：

   (a) $\log_7 6$　　(b) $\log_7 42$

2. 已知 $u = \log_2 a$， $v = \log_2 b$， $w = \log_2 c$， 以 u， v 与 w 表示下列各式：

   (a) $\log_2 (abc)$　　(b) $\log_2 \frac{2ab}{c}$

幂的对数

若 a 与 x 是正数，且 $x = a^p$， 则 $\log_a x = p$

$$
\begin{aligned}
x^m &= \left(a^p\right)^m \\
&= a^{mp} \\
\log_a x^m &= mp \\
\therefore \log_a x^m &= m\log_a x
\end{aligned}
$$

即

$$\log_a x^m = m\log_a x \ (a \neq 1)$$

例题 9

求下列各式的值：

(a) $\log_{10} 100$　　(b) $\log_{10} 0.1$

(c) $\log_3 27$　　(d) $\log_2 0.25$

解： (a)
$$
\begin{aligned}
\log_{10} 100 &= \log_{10} 10^2 \\
&= 2\log_{10} 10 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

(b) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} 10^{-1}$
$= -\log_{10} 10$
$= -1$

(c) $\log_3 27 = \log_3 3^3$
$= 3\log_3 3$
$= 3$

(d) $\log_2 0.25 = \log_2 \frac{1}{4}$
$= \log_2 2^{-2}$
$= -2\log_2 2$
$= -2$

例题 10

已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$， $\log_{10} 3 = 0.4771$， $\log_{10} 5 = 0.6990$，求下列各式的值：

(a) $\log_{10} 12$ (b) $\log_{10} 12.5$

(c) $\log_{10} \sqrt{45}$ (d) $\log_{10} \sqrt[3]{60}$

解： (a) $\log_{10} 12 = \log_{10}\left(2^2 \times 3\right)$
$= \log_{10} 2^2 + \log_{10} 3$
$= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3$
$= 2 \times 0.3010 + 0.4771$
$= 1.0791$

(b) $\log_{10} 12.5 = \log_{10} \frac{25}{2}$
$= \log_{10} 5^2 - \log_{10} 2$
$= 2\log_{10} 5 - \log_{10} 2$
$= 2 \times 0.6990 - 0.3010$
$= 1.097$

(c) $\log_{10}\sqrt{45}=\log_{10}(3\sqrt{5})$

$$=\log_{10}3+\frac{1}{2}\log_{10}5$$

$$=0.4771+\frac{1}{2}\times0.6990$$

$$=0.8266$$

(d) $\log_{10}\sqrt[3]{60}=\log_{10}60^{\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{3}\left(\log_{10}2^2+\log_{10}3+\log_{10}5\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}5\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\times0.3010+0.4771+0.6990\right)$$

$$=0.5927$$

例题 11

已知 $s=\log_a x$， $t=\log_a y$， $u=\log_a z$， 以 s， t 及 u 表示下列各式:

(a) $\log_a\left(x^2y^3\right)$

(b) $\log_a\frac{x}{y^2}$

(c) $\log_a\frac{\sqrt{x}}{yz^2}$

(d) $\log_a\frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$

解: (a) $\log_a\left(x^2y^3\right)=\log_a x^2+\log_a y^3$

$$=2\log_a x+3\log_a y$$

$$=2s+3t$$

(b) $\log_a\frac{x}{y^2}=\log_a x-\log_a y^2$

$$=\log_a x-2\log_a y$$

$$=s-2t$$

(c) $\log_a \dfrac{\sqrt{x}}{yz^2} = \log_a x^{\frac{1}{2}} - \left(\log_a y + \log_a z^2\right)$

$= \dfrac{1}{2}\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$

$= \dfrac{1}{2}s - t - 2u$

(d) $\log_a \dfrac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a x^2 + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z^{\frac{1}{3}}$

$= 2\log_a x + \dfrac{1}{2}\log_a y - \dfrac{1}{3}\log_a z$

$= 2s + \dfrac{1}{2}t - \dfrac{1}{3}u$

随堂练习 7

1. 已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$， $\log_{10} 5 = 0.6990$， 求下列各式的值：

(a) $\log_{10}\sqrt{8}$　(b) $\log_{10} 0.4$　(c) $\log_{10} 2.5$　(d) $\log_{10} 20$

2. 已知 $u = \log_2 a$， $v = \log_2 b$， $w = \log_2 c$， 以 u， v 与 w 表示下列各式：

(a) $\log_2(4abc)$　(b) $\log_2\sqrt{\dfrac{ac}{b^3}}$　(c) $\log_2 \dfrac{a^3b\sqrt[3]{c}}{16}$

例题 12

化简下列各式：

(a) $\log_6 20 - \log_6 24 - \log_6 30$

(b) $3\log_4 2 + \log_4 6 - \dfrac{1}{2}\log_4 9$

(c) $\dfrac{\log_3 32}{\log_3 16}$

解：(a) $\log_6 20-\log_6 24-\log_6 30=\log_6 \dfrac{20}{24\times 30}$

$$=\log_6 \frac{1}{36}$$

$$=-2$$

(b) $3\log_4 2+\log_4 6-\dfrac{1}{2}\log_4 9=\log_4 2^3+\log_4 6-\log_4 9^{\frac{1}{2}}$

$$=\log_4 \frac{2^3\times 6}{\sqrt{9}}$$

$$=\log_4 16$$

$$=2$$

(c) $\dfrac{\log_3 32}{\log_3 16}=\dfrac{\log_3 2^5}{\log_3 2^4}$

$$=\frac{5\log_3 2}{4\log_3 2}$$

$$=\frac{5}{4}$$

注意

在例题 12 (c) 中，

- $\dfrac{\log_3 32}{\log_3 16}\neq \log_3 \dfrac{32}{16}$
- $\dfrac{\log_3 32}{\log_3 16}\neq \dfrac{32}{16}$

例题 13

求下列各式的值：

(a) $\log \sqrt[5]{100}$　　　　(b) $\log_2 \left(4^7\cdot 2^5\right)$

解： (a) $\log \sqrt[5]{100}=\log \left(10^2\right)^{\frac{1}{5}}$

$$=\frac{2}{5}\log 10$$

$$=\frac{2}{5}$$

(b) $\log_2 \left(4^7\cdot 2^5\right)=\log_2 \left(2^{14}\cdot 2^5\right)$

$$=\log_2 2^{19}$$

$$=19$$

随堂练习 8

1. 化简下列各式：

(a) $\log_2 150+\log_2 12-\log_2 450$　　(b) $3\log_{12} 6+\frac{1}{4}\log_{12} 16-\frac{1}{2}\log_{12} 9$

2. 求下列各式的值：

(a) $\log 0.0001^3$　　(b) $\log_3\left(27^2\cdot 9\right)$

练习 2.4b

1. 已知 $\log_5 2=0.4307$， $\log_5 3=0.6826$， 求下列各式的值：

(a) $\log_5 1.5$　　(b) $\log_5 12$　　(c) $\log_5\frac{1}{6}$

(d) $\log_5 30$　　(e) $\log_5 13.5$　　(f) $\log_5\left(3\sqrt{3}\right)$

2. 已知 $\log_a x=m$， $\log_a y=n$， 以 m 及 n 表示下列各式：

(a) $\log_a\left(axy^2\right)$　　(b) $\log_a\left(x^3y^2\right)$　　(c) $\log_a\sqrt{\frac{ax}{y}}$

(d) $\log_a\left(x\sqrt{ay}\right)$　　(e) $\log_a\frac{\sqrt{x}}{ay^2}$　　(f) $\log_a\frac{y^2}{(ax)^3}$

化简下列各式：(3 至 14)

3. $\frac{\log 216}{\log 36}$

4. $\frac{\log_2 625}{\log_2 125}$

5. $\frac{\log_5\left(2\sqrt{8}\right)}{\log_5\sqrt[3]{2}}$

6. $\frac{\log_2 x^2+\log_2 y^2}{\log_2(xy)}$

7. $\log_4 9-\log_4 36$

8. $\log_3 21+\log_3 18-\log_3 14$

9. $2\log_2 6-\log_2 9$

10. $\frac{1}{2}\log_{10} 16-\log_{10} 5-\log_{10} 8$

11. $2\log_2 5-\log_2 100+3\log_2 4$

12. $5\log_{10} 2+2\log_{10} 5-\frac{1}{2}\log_{10}\left(\frac{16}{25}\right)$

13. $3\log_{10}\dfrac{3}{2}+2\log_{10}\dfrac{1}{3}-\log_{10}\dfrac{3}{5}+2\log_{10}4$

14. $\log_2 p^2-2\log_2(pq)+\log_2 q^2$

总复习题 2

求下列各式的值：(1 至 8)

1. $2^{\frac{1}{6}}\times 4^{\frac{1}{3}}$

2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\times 3^{\frac{3}{5}}$

3. $\left(\dfrac{81}{49}\right)^{\frac{1}{2}}-11^0$

4. $2^4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

5. $\dfrac{27^0}{3^{-2}}+\dfrac{36^{-\frac{1}{2}}}{2^{-3}}$

6. $25^{-2}\times 625^{\frac{1}{4}}\times 125^{\frac{1}{3}}\div\left(5^8\right)^{\frac{1}{8}}$

7. $\dfrac{18^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}}$

8. $2^3\times 20^{\frac{1}{2}}\times 5^{\frac{3}{2}}$

化简下列各式：(9 至 12)

9. $\dfrac{\left(x^4\right)^0\left(x^{-2}\right)^3}{4x^5}$

10. $\dfrac{\left(p^2\right)^5\times\left(p^3\right)^{-3}}{p^0}$

11. $\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^6\div\left(x^2y^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

12. $\left(a^3b\right)^{-1}\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^3$

解下列指数方程式：(13 至 18)

13. $\left(4^{3n}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=64$

14. $7^{p+1}-343=0$

15. $9^{3y+4}=27^{y+3}$

16. $\sqrt{3^{n+3}}=27^{n-2}$

17. $3^x-4\left(3^x\right)+3=0$

18. $25^x\cdot 3^{2x}=225$

19. 若 $x^3=216$，求 x^{-2} 的值。

20. 若 $2x^2=18$，求 x^{-3} 的值。

21. 下列各式中，求：

(a) $\log_x 9=2$　　(b) $\log_3 x=4$

(c) $\log_{\frac{1}{2}} 128=x$　　(d) $\log_x \frac{1}{16}=-2$

22. 求下列各式的值：

(a) $\log_9 3$　　(b) $\log_{16} 8$　　(c) $\log_{0.1} \frac{1}{10000}$

(d) $\log_{\sqrt{5}} 125$　　(e) $\log_2\left(4\sqrt{2}\right)$　　(f) $\log_3 \frac{1}{3\sqrt{3}}$

23. 已知 $\log 2=0.3010$， $\log 3=0.4771$ 及 $\log 7=0.8451$，求下列各式的值：

(a) $\log 12$　　(b) $\log 42$　　(c) $\log 15$

(d) $\log 0.49$　　(e) $\log\sqrt{\frac{56}{27}}$

24. 已知 $\log_p 3=x$， $\log_p 5=y$，以 x 及 y 表示下列各式：

(a) $\log_p \frac{5}{3}$　　(b) $\log_p 45$　　(c) $\log_p \frac{5p^2}{27}$

(d) $\log_p \frac{3\sqrt{p}}{25}$　　(e) $\log_p \sqrt{\frac{75}{p^3}}$

求下列各式的值：(25 至 34)

25. $\log 125+\log 8$

26. $2\log 6+3\log 5-\log 45$

27. $\log 1+\left(\log_2 8\right)\left(\log_7 343\right)$

28. $\log_4\sqrt{12}-\log_4\sqrt{3}$

29. $\dfrac{\log\sqrt{8}}{\log\sqrt[3]{2}}$

30. $\log_3\frac{1}{3\sqrt{3}}+\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$

31. $\log_4 64-\log_5\left(\frac{13}{15}-\frac{2}{3}\right)-\log_3 1$

32. $\log_3 15+\log_3 6-\log_3 10$

33. $\log_6 54-\log_6\frac{1}{42}-\log_6 63$

34. $\log_2\frac{25}{16}-2\log_2\frac{5}{9}+\log_2\frac{32}{162}$

3 统计表与统计图

学习目标

- 理解统计表与统计图
- 能绘制象形图、条形图、圆形图、线形图及茎叶图，并掌握其特点
- 能编制频数分配表及累积频数分配表
- 能绘制直方图及频数多边形
- 能绘制累积频数多边形及计算累积频数百分率



3.1 统计学的基本概念

在生活中，数据可以成为我们做决定的依据，从而让我们的工作或生产变得更有效率。例如，茶餐厅老板想在忙碌的时段请临时工人，他需要知道通常每天的哪个时段顾客较多？体育老师想组一支啦啦队，她想知道身高介于158公分与160公分之间的高三女生有几个？药厂研发新药物时需要知道新药物对多少成的患者有疗效。对于这些繁杂的数据，我们必须使用客观科学的方法加以处理。

统计学主要是研究如何收集、整理及分析数据，从而得出相应结论的科学。在本章中，我们将理解收集数据的基本方法并学习使用图表来呈现数据。

思考题

鞋厂要生产5000双某款式的鞋子。如果鞋子的尺码有10种规格，有人提议每种规格造500双，你觉得这个提议好吗？为什么？

全面调查与抽样调查

由全体研究对象所构成的集合称为总体，例如：张老师想知道某班的学生最喜欢哪一类的联课活动，那么该班的所有学生就构成总体；某灯泡工厂的工程师想知道该工厂所生产的灯泡的寿命，这时该工厂所生产的全部灯泡就构成总体。

收集数据时可以视情况采用全面调查或抽样调查。全面调查就是对总体中的每个对象都进行调查，比如在上述的例子中，张老师可以让班上的每个学生勾选自己最喜欢的活动以收集资料。全面调查一般会牵涉极大的人力，财力和时间，例如全国的人口普查；对于某些问题，全面调查甚至并不可行，例如我们不可能把工厂所生产的灯泡逐个测试它们的寿命。

抽样调查就是对总体的某个子集进行调查，并用所得到的结果推测总体的情况。这个被选取的子集叫作样本。工业产品的品质管理，电视节目的收视调查，市场的物价指数计算等，都广泛地采用抽样调查法。抽样方法是一门专业的学问，样本的代表性将影响用调查结果估计全体现象的准确程度。

思考题

市场调查员想知道吉隆坡的年轻人对于网购的喜好程度，他到城市中各大百货商场用问卷的方式作抽样调查。你认为这个调查员的抽样方法恰当吗？为什么？

随堂练习 1

要调查下面几个问题，应该作全面调查？还是抽样调查？为什么？

(a) 了解全班同学每周上网的时间；

(b) 调查市场上零食的防腐剂是否符合卫生部所规定的标准；

(c) 家私厂要知道所生产的椅子所能承受的重量。

3.2 频数分配表

如果要了解班上同学对联课活动的喜爱情况，我们可以使用问卷调查的方法收集数据。

调查问卷

在下面五类的联课活动中，你最喜欢的是（　　）(单选)

A. 制服团体　　B. 体育团体

C. 演艺团体　　D. 学术团体

E. 服务团体

初三德班主任对该班的50位同学进行了以上的问卷调查，收集到以下的数据：

A	A	D	B	C	D	C	C	C	D
D	B	E	A	D	D	D	C	D	C
C	B	D	B	A	D	C	C	C	C
A	D	C	E	E	E	C	A	E	E
B	B	D	A	D	E	D	C	D	D

从这些杂乱无章的数据中，我们并不容易了解到同学们的喜好情况。如表1所示，将数据整理成统计表，就一目了然了。统计表的栏目并非一成不变，可视实际需要增删之。表1显示了喜爱各类活动的人数分配，是频数分配表的一种。

活动类型	划记	人数	百分比
制服团体	卌 ||	7	14%
体育团体	卌 |	6	12%
演艺团体	卌 卌 ||||	14	28%
学术团体	卌 卌 卌 |	16	32%
服务团体	卌 ||	7	14%
合计		50	100%

表1 初三德班学生最喜爱的活动

思考题

如果想要知道男、女生喜欢的活动的差异，问卷中应该加入什么项目？

思考题

表格中的划记的功用是什么？人数合计，除了让我们知道班上的总人数之外，还有什么功能？

随堂练习 2

投掷一枚硬币20次，记录其出现‘正面’及‘反面’的次数，并以表格呈现所得到的数据。

数据的分组

在日常生活中还有另一种数据，须加以分组才能制作出有用的表格，我们以例子说明之。

体育老师想选取20名学生参加啦啦队培训。为了整齐起见，她要选取身高相近的同学，以下是40位学生的身高数据(以公分为单位)，她应该选取身高在哪个范围的学生？

151	122	132	145	135	150	156	147	148	154
127	140	148	150	152	150	149	158	152	125
134	145	147	152	151	147	146	152	150	147
132	150	145	155	154	150	147	150	149	145

如果将每个身高作为一组，那么将会得到很多组别而看不出整体数据分布的情况。为了增加表格的可读性，我们可以先将上述的数据分组，再制作频数分配表。数据分组的具体步骤如下：

1. 求全距

   上面的数据中的最大值是158，最小值是122。它们的差叫作全距。

   全距＝最大值－最小值

   $=158-122$

   $=36$

2. 决定组距和组数

   组距决定每组的大小，一般上组距越大，组数就越少。在此例中，

   取组距$=10$，$\dfrac{36}{10}=3.6$，将会得到4组；

   取组距$=5$，$\dfrac{36}{5}=7.2$，将会得到8组。

组距的决定主要取决于分组是否能真实的反映数据的分布情况及表格的可读性，并没有固定的标准。在此例中，我们取组距为 5。

3. 设组限

组限是界定每组范围的两个数字，即上限与下限。第一组的下限必须小于或等于数据中的最小值，而最后一组的上限必须大于或等于数据中的最大值。在此例中，最小值为 122，我们可以将第一组的下限定为 120。将第一组的下限加上组距就得到第二组的下限为 125，依此类推，所得的组别如下：

120 – 124
125 – 129
130 – 134
⋮

每组的上限与下限的平均值称为该组的组中点，如上述的分组中，

$$第一组的组中点=\frac{120+124}{2}=122$$

思考题

我们可以设 122 为第一组的下限吗？

4. 作表

身高 (cm)	划记	人数
120 – 124	|	1
125 – 129	||	2
130 – 134	|||	3
135 – 139	|	1
140 – 144	|	1
145 – 149	卌 卌 ||||	14
150 – 154	卌 卌 卌	15
155 – 159	|||	3
合计		40

从频数分配表看出，体育老师可以考虑从145－149及150－154那两组中选出啦啦队成员。

在上面的例子中身高都是整数，那是已经经过四舍五入的近似值。所以第一组实际上包含从119.5到小于124.5的身高；第二组包含从124.5到小于129.5的身高，依此类推。这里的119.5叫作第一组的下组界，124.5为第一组的上组界。组距也等于某组上组界与下组界的差。

对于连续性资料如身高，时间，体重等，我们也可以采取以下的分组方式：

120－125代表　$120 \leq$ 身高 < 125

125－130代表　$125 \leq$ 身高 < 130

130－135代表　$130 \leq$ 身高 < 135

⋮　　　　　　⋮

在这种分组下，下组界等于下限，上组界等于上限。

例题 1

初三忠班学生的科学测验成绩如下：

20	71	56	53	49	95	64	36
65	6	50	51	53	44	14	64
73	41	90	57	52	32	76	81
93	91	31	71	37	60	62	18
93	65	86	30	84	8	56	41

以0－9，10－19，⋯分组，作一频数分配表，并回答以下问题：

(a) 求第五组的上下限、上下组界及组中点；

(b) 求组距；

(c) 若以60分为及格标准，有多少人及格但少过80分？

(d) 不及格的学生占百分之几？

(e) 如果有一位同学得到100分，要如何分组比较恰当？

(f) 如果有一位同学得到100分，又有一位同学得零分时，要如何分组？

解：作表

分数	划记	人数
0 – 9	||	2
10 – 19	||	2
20 – 29	|	1
30 – 39	卌	5
40 – 49	||||	4
50 – 59	卌 |||	8
60 – 69	卌 |	6
70 – 79	||||	4
80 – 89	|||	3
90 – 99	卌	5
合计		40

(a) 第五组的上下限分别为49及40、上下组界分别为49.5及39.5。

组中点$=\dfrac{40+49}{2}=44.5$

(b) 组距$=49.5-39.5=10$。

(c) 及格但少过80分的有$6+4=10$人。

(d) 不及格的学生有$2+2+1+5+4+8=22$名

$\dfrac{22}{40}\times 100\%=55\%$

(e) 如果有一位同学得到100分，我们可以用 1–10，11–20，⋯分组。

(f) 如果有一位同学得到100分，又有一位同学得零分，我们可以用 $0 \le x < 10$，$10 \le x < 20$，⋯，$90 \le x \le 100$ 作分组。

思考题

(f) 小题还有没有其他的答案？

随堂练习 3

1. 初三仁班学生的数学测验成绩如下：

49	47	65	56	54	44	41
53	31	55	47	38	9	74
39	87	50	75	49	32	66
49	38	22	15	70	74	35
39	64	87	45	88	45	87
89	84	37	14	50	64	68
84	57	47	2	74	40	40

(a) 以0–9，10–19，⋯分组，作频数分配表。

(b) 找出频数最高的那一组；

(c) 第一组的下组界是多少？

2. 假设你想探讨班上的男女同学所喜爱的科目是否有差别，试为此目的设计一份简单的问卷。

练习 3.2

1. 要调查下面几个问题，你认为应该作全面调查还是抽样调查？为什么？
   (a) 人力资源部要知道马来西亚大学毕业生的起薪；
   (b) 某校校长想知道全校各年级的数学成绩分布；
   (c) 鞋厂经理想知道市场上最多人穿的鞋码是多少。
2. 40名学生选出他们最喜欢的球类时，8名选择羽毛球，4名选择篮球，6名选择网球，10名选择乒乓球，而12名选择足球。试将这些数据整理成一频数分配表。
3. 投掷一枚骰子32次，将结果记录如下：

4	6	4	1	3	2	3	2
3	1	1	6	4	6	5	4
6	4	6	2	4	2	5	6
6	1	4	1	2	6	1	4

   试将以上的结果整理成一频数分配表。
4. 下表显示某农场从2005年至2015年的番薯及香蕉的产量。

年份	番薯的产量 (公吨)	香蕉的产量 (公吨)
2005	20.0	7.5
2006	18.5	9.0
2007	22.5	10.0
2008	25.0	8.5
2009	24.0	8.0
2010	19.5	10.0
2011	21.0	11.0
2012	22.5	10.5
2013	25.0	9.5
2014	23.0	11.0
2015	23.5	10.0

根据此表写出下列事件的年份：

(a) 出产最少番薯；

(b) 番薯的产量较前一年减少最多；

(c) 香蕉的产量减少而番薯的产量增加；

(d) 香蕉的产量较前一年增加的百分比最大。

5. 将以下50名摔角选手的体重(公斤)，以50－60，60－70，⋯ 分组，作一频数分配表，并求频数最高那组的组中点及在该组的选手所占的百分比。

79.4	78.7	81.3	102.7	104.8
64.5	72.2	104.6	81.2	91.2
58.2	96.6	111.2	90.2	112.3
87.3	72.9	68.3	96.5	117.2
107.7	69.7	90.5	92	73.5
94.7	71.8	106.2	78.8	94.1
115.1	104.5	73.1	106.4	103
117.2	101.5	127.4	97.4	119.8
101.5	89.2	99.1	88.8	94.2
121.9	96.7	77.5	77.4	101.3

3.3 统计图

除了统计表，我们还可以用图形来更生动的表达数据的分布。统计图的种类很多，它们各有不同的形式及优缺点。在本节中，我们将学习如何绘制象形图，条形图，圆形图，线形图，茎叶图，直方图以及频数多边形。

象形图

这是一种用实物的象形来表示数据的统计图。它形象具体、鲜明、生动、易懂，很容易引起读者的兴趣。例如表1的数据可用以下的象形图表示：

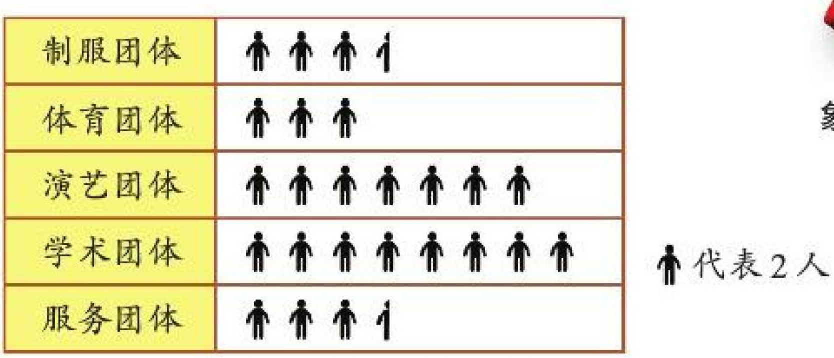


图 3-1 初三德班学生最喜爱的活动

思考题

象形图有什么优缺点？

随堂练习 4

巴生举行了一项为期三天的灭鼠运动，所灭的老鼠数量如下表所示。

	第一天	第二天	第三天
所灭的老鼠数量	1000	5000	700

用象形图表示这些数据。

条形图

条形图以宽度相同的条形长短来表示数据。相较于象形图，条形图的绘制方法比较简单，对于数值的表达比较精确，也容易被了解；因此被广泛的采用。

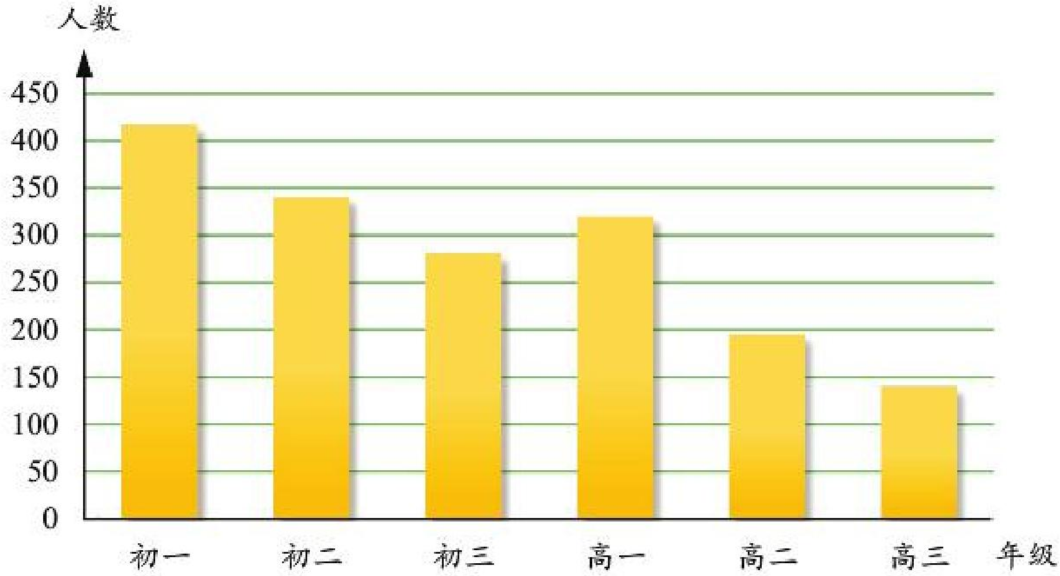
例题 1

培才中学 2015 年各年级的学生人数如下：

年级	初一	初二	初三	高一	高二	高三
人数	417	340	280	320	195	140

用条形图表示表中的资料。

解：



培才中学 2015 年各年级学生人数的条形图

作条形图时须注意以下几点：

- 条形的宽度须相等。
- 条形之间的距离须相等。

例题 1 中只有年级与频数两项资料，因此只需一种条形就可以将资料完整的表示出来。如果数据的种类比较多，也可以将条形标示成不同的颜色以代表不同组别的频数。

思考题

1. 简单的描述这组数据的分布。
2. 高一的学生比初三的学生多，会不合理吗？为什么？

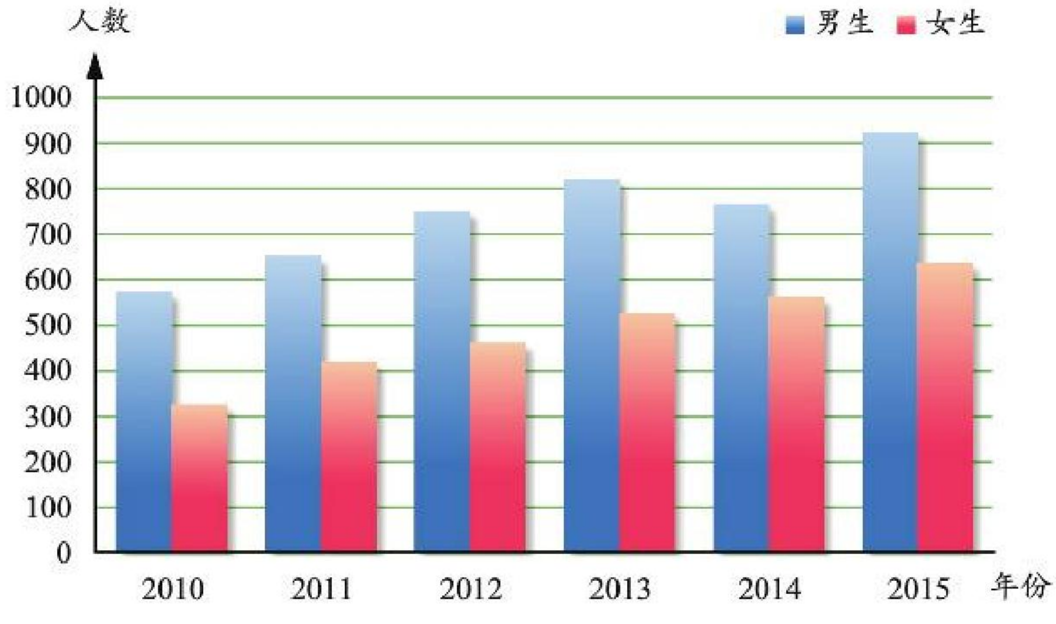
例题 2

恒毅中学2010至2015年的学生人数如下：

年份	男生	女生	总数
2010	573	326	899
2011	651	420	1071
2012	750	461	1211
2013	820	527	1347
2014	765	561	1326
2015	923	637	1560

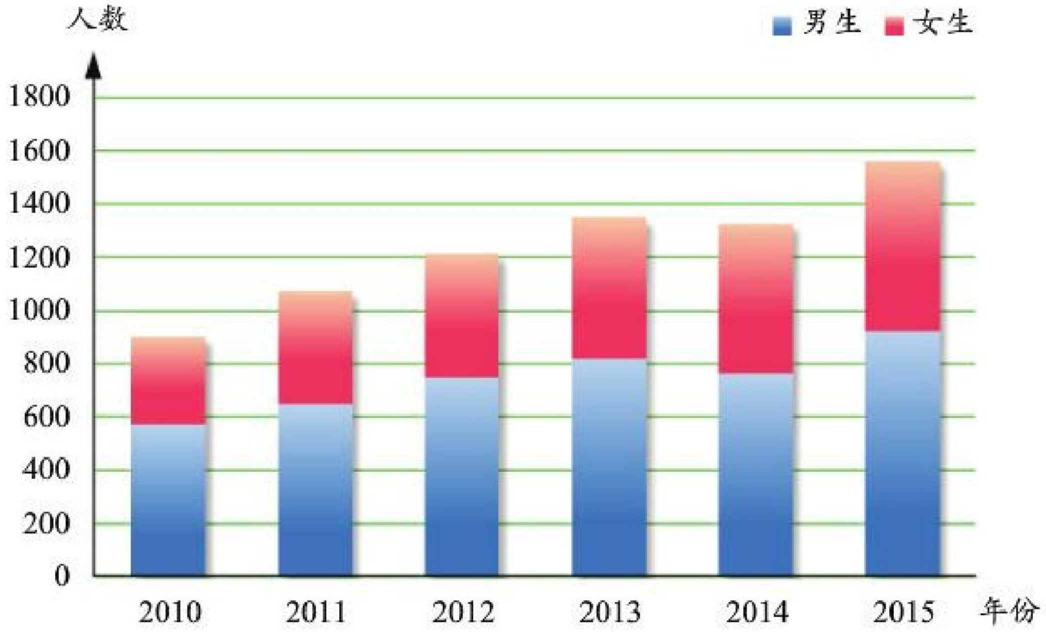
用条形图表示这些数据。

解：表中每个年份都有男生及女生的数据，如果要凸显每年男女生人数的差别，我们可以用两种不同颜色的条形分别代表男生及女生的人数，并将同一年的条形画在一起，如下图所示。这种条形图称为复式条形图。



恒毅中学2010 - 2015年学生人数的复式条形图

上述的条形图虽然清楚的表达了男女生人数的差异，却无法呈现每年的学生总数。如果我们对学生的总数更有兴趣，则可以采取以下的画法作组合条形图。



恒毅中学 2010 - 2015 年学生人数的组合条形图

随堂练习 5

统计班上同学们生日的月份，作一统计表并以条形图表示这些数据。

练习 3.3a

1. 某校为其 1530 名学生上学所使用的交通工具进行一项调查，得到以下的资料：

步行	脚踏车	汽车	巴士	摩多车
360	150	330	420	270

以象形图表示这些数据。(提示：用一个图象代表 30 或 60)

2. 某城市一周内每天发生车祸的数目如下，用象形图表示这些资料。

星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
70	40	30	35	50	60	65

3. 某班30名学生写下他们家里是否拥有电视机、收音机、冷气机、微波炉及电脑。经统计后，拥有上述电器的人数如下：

电器	电视机	收音机	冷气机	微波炉	电脑
人数	27	9	21	12	27

(a) 用象形图表示这些资料；

(b) 最少人拥有的电器是什么？

(c) 拥有各种电器的人数的总和为96，而全部学生只有30名，这该作何解释？

(d) 若拥有各种电器的人数总和小于30时，又该作何解释？

4. 2015年吉隆坡每个月的平均雨量如下表所示：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
雨量 (mm)	166	158	238	277	221	136	129	160	196	276	286	243

用条形图表示上述的资料，并回答以下的问题：

(a) 哪三个月的雨量最多？

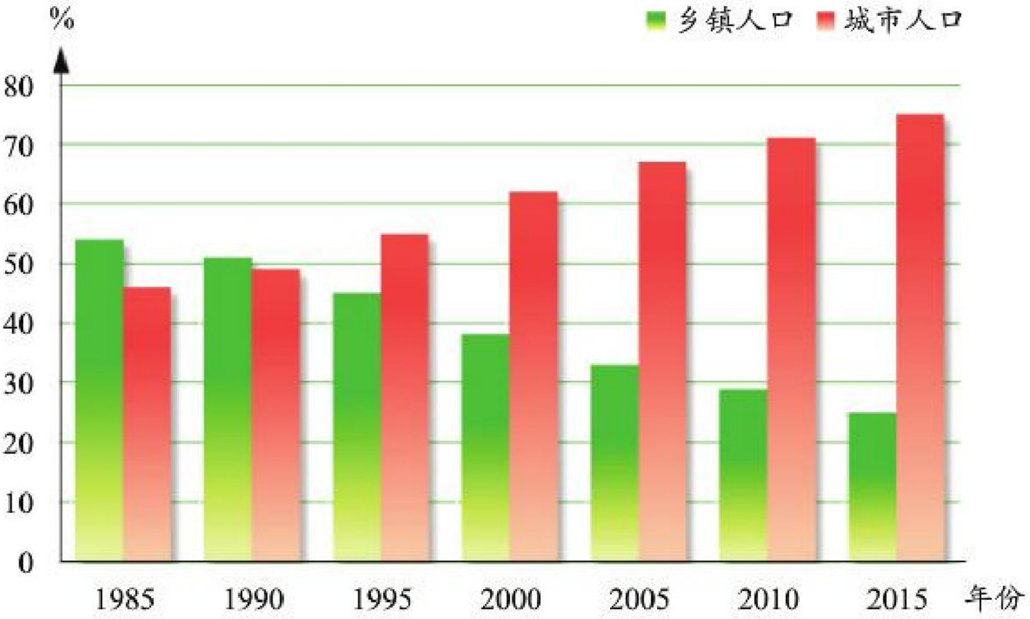
(b) 吉隆坡的全年降雨量是多少cm?

5. 建华手机公司今年首六个月卖出的A品牌手机与B品牌手机的数量如下：

月份	A品牌	B品牌
一月	78	25
二月	84	26
三月	37	19
四月	34	12
五月	40	10
六月	48	21

用(a)复式条形图；(b)组合条形图表示这些资料。

6. 根据世界银行的资料，我国自1985年起每隔五年的城乡人口所占的百分比如下图所示。

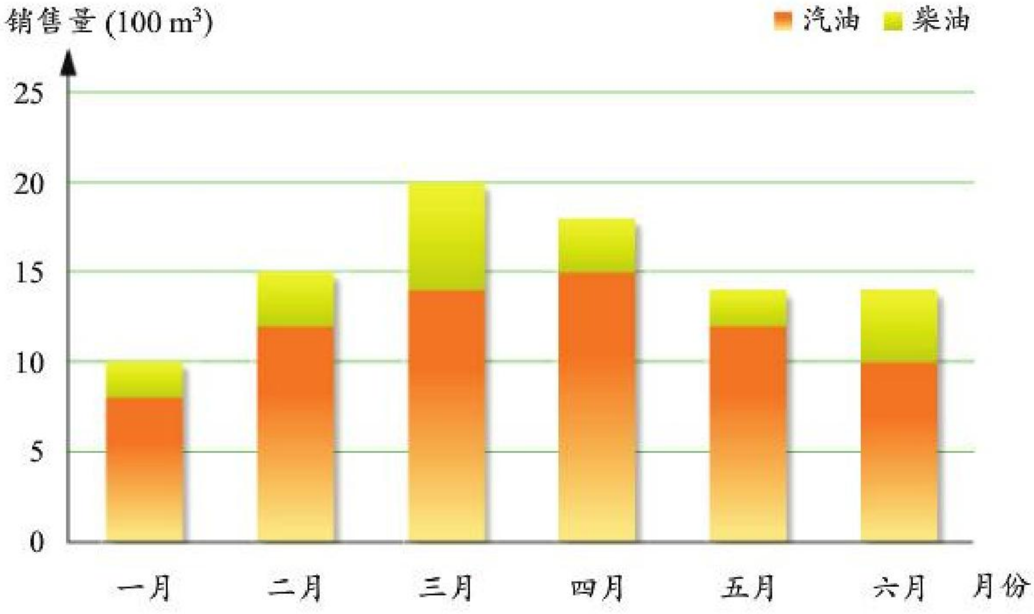


(a) 在图中，哪一年的城乡人口百分比最接近？

(b) 哪一年起城市的人口是乡镇人口的两倍或以上？

(c) 在每一年的条形图，乡镇人口的百分比加上城市人口的百分比应该等于多少？为什么？

7. 一家油站在去年首六个月的汽油与柴油的销售量如下图所示：



(a) 三月份售出的柴油占该月总销售量的百分之几？

(b) 在哪一个月份汽油的销售量增加而柴油的销售量减少？

(c) 哪两个月的总销售量相等？

8. 在一项调查中，100 个人的血型记录如下：

AB	A	A	O	A	O	A	A	AB	A
B	O	A	A	O	B	O	A	A	AB
O	A	O	O	A	O	A	O	A	A
O	O	O	O	O	A	O	A	O	A
O	B	A	A	B	B	B	A	O	B
A	O	O	O	O	O	A	A	A	B
O	O	A	A	A	O	O	O	O	O
O	A	A	O	O	B	O	O	B	A
A	A	A	O	O	A	O	O	B	O
O	A	A	O	O	A	A	O	A	AB

(a) 将上述资料列成统计表；
(b) 以条形图表示这些资料。

圆形图

圆形图是以扇形面积表示数据百分比的统计图。

例题 3

培英中学高中部的文科生有 216 名，理科生有 108 名，商科生有 396 名。作一圆形图表示这些数据。

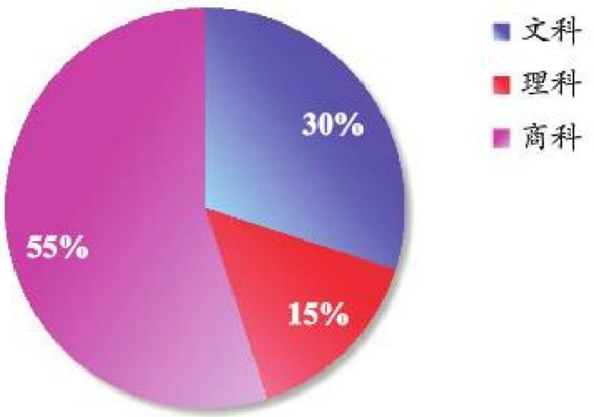
解： 1. 求总数。

$$\text{总人数} = 216 + 108 + 396$$
$$= 720$$

(续) 2. 求百分比及圆心角。

分班	人数	百分比	圆心角
文科	216	$\frac{216}{720}\times100\%=30\%$	$\frac{216}{720}\times360^\circ=108^\circ$
理科	108	$\frac{108}{720}\times100\%=15\%$	$\frac{108}{720}\times360^\circ=54^\circ$
商科	396	$\frac{396}{720}\times100\%=55\%$	$\frac{396}{720}\times360^\circ=198^\circ$
总和	720	100%	360°

3. 以适当的半径作一圆，根据所求得的角度，用量角器在圆上作圆心角。
4. 在各扇形涂上不同颜色或画上线条，并写出所占的百分比。
5. 注明各扇形区域所代表的资料。



培英中学高中部学生分科情况的圆形图

例题 4

某市的族群分布如下：

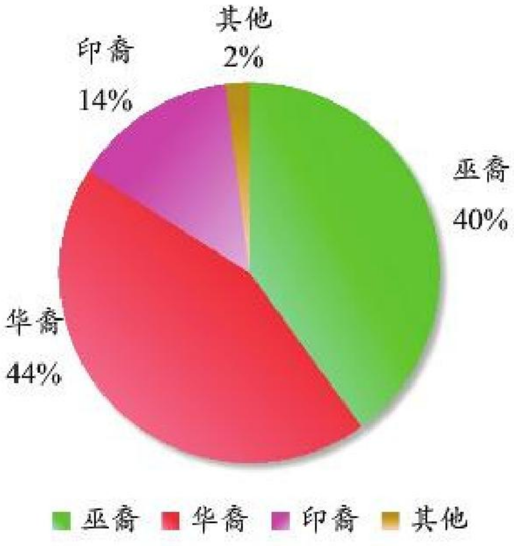
族群	人口 (千人)
巫裔	20
华裔	22
印裔	7
其他	1

作一圆形图表示这些数据。

解：

族群	人口 (千人)	百分比	圆心角
巫裔	20	$\frac{20}{50}\times100\%=40\%$	144°
华裔	22	$\frac{22}{50}\times100\%=44\%$	158.4°
印裔	7	$\frac{7}{50}\times100\%=14\%$	50.4°
其他	1	$\frac{1}{50}\times100\%=2\%$	7.2°
总和	50	100%	360°

(续)



某市族群分布的圆形图

思考题

圆形图有什么优缺点？

补充资料

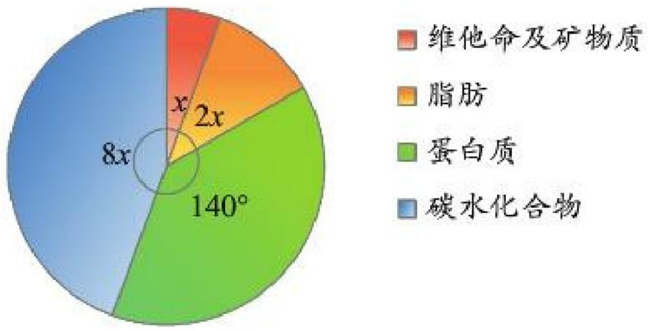
碰到狭小的圆心角时，我们可以将百分比写在所对应扇形的外侧。
左图中，我们也可看到，如果不标示百分比，我们很难分辨两个百分比很接近的族群大小。

例题 5

右图表示某种食物中所含有的成分。

(a) 求 x；

(b) 若此食物含有 210 克的蛋白质，求此食物的总重量。



解： (a)
$$140° + x + 2x + 8x = 360°$$
$$11x = 220°$$
$$x = 20°$$

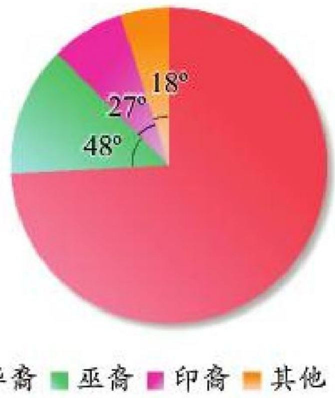
(b)
$$\frac{210}{\text{食物的总重量}} = \frac{140}{360}$$
$$\text{食物的总重量} = 210 \times \frac{360}{140}$$
$$= 540 \text{ 克}$$

随堂练习 6

某种食物含蛋白质8克，脂肪4克及碳水化合物72克，作一圆形图表示这些数据。

练习 3.3b

1. 在森美兰某中学的40名教师中，12名来自彭亨，10名来自柔佛，4名来自雪兰莪，其余的都来自该州。作一圆形图表示师资的来源州属。
2. 一项有关升学志愿的调查发现在800名学生当中，希望念工程的有240人，商科280人，理科120人，文科160人。作一圆形图表示这项资料。
3. 某家庭开销如下：伙食占总收入的35%，房贷15%，水电5%，教育20%，其他25%。以圆形图表示这些资料。
4. 一间小学按它的学生的身高将他们分成三组，甲组占$\frac{1}{3}$，乙组占$\frac{5}{12}$，其余的为丙组。已知丙组有150人，问
   (a) 全校学生共有多少人？
   (b) 甲、乙两组的人数各为多少？
   (c) 用圆形图表示各组所占的百分比。
5. 右图表示某校1200名学生的种族分配情况。以表列出
   (a) 各族学生的人数；
   (b) 各族学生所占的百分比。



线形图

线形图是以折线表示数据的统计图。它常用以表示一段时间内数量变化的趋势。

例题 6

吉隆坡从1960年到2010年，每隔十年所作的人口统计得数据如下：

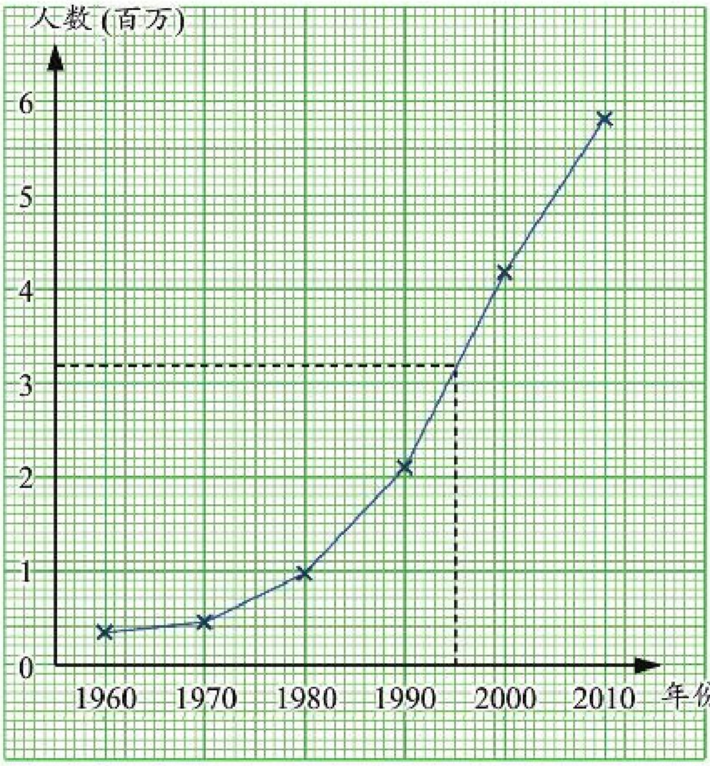
年份	1960	1970	1980	1990	2000	2010
人数	343527	451201	971445	2097661	4176469	5809953

作一线形图表示这些数据，并回答以下的问题。

(a) 哪十年的人口增加最快？

(b) 从图中估计1995年吉隆坡的人数。

解：选择适当的比例尺，设好坐标系，并将各点的位置标上，然后用直线顺序连接，便可得到如下图所示的线形图。



1960年至2010年吉隆坡人口的线形图

(a) 1990年至2000年间的线段最陡，因此，这段期间的人口增加最快。

(b) 从图中，我们可以看到1995年所对应的人数大约是三百二十万人。

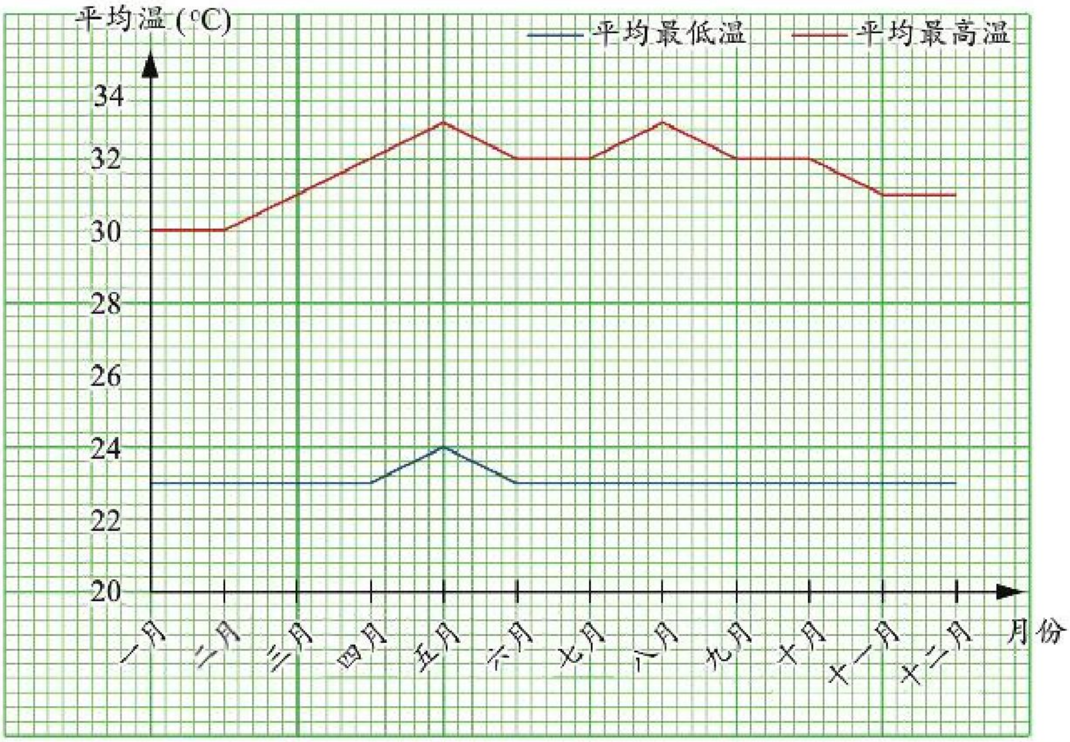


补充资料

资料显示，吉隆坡1995年的人口接近三百万人，我们的估计值与实际人口相差大约6.7%。

例题 7

砂拉越每个月的平均最低温及平均最高温如下图所示。



砂拉越每月平均最低温及平均最高温的线形图

根据这个线形图，回答以下的问题：

(a) 平均最低温的变化较小还是平均最高温的变化较小？

(b) 平均最低温与平均最高温相差最大的是哪一个月？

解： (a) 平均最低温的变化较小。

(b) 平均最低温与平均最高温相差最大的是八月。

思考题

例题 7 中纵坐标的标示并不是从零开始。如果从零开始标示有什么缺点？

随堂练习 7

一汽车代理商去年首六个月的汽车销售量如下表所示：

月份	一月	二月	三月	四月	五月	六月
销售量 (千辆)	5	7	6	3	2	2.5

作一线形图表示这组数据。

茎叶图

我们在随堂练习 3 看过以下的数据，并将这些数据整理成频数分配表以表示 49 名学生的数学测验成绩的分布。

49	47	65	56	54	44	41
53	31	55	47	38	9	74
39	87	50	75	49	32	66
49	38	22	15	70	74	35
39	64	87	45	88	45	87
89	84	37	14	50	64	68
84	57	47	2	74	40	40

在分组后，我们会丢失一部分原始数据的资讯。茎叶图可以在表示数据分布的同时也保留部分的原始资料。我们将上述数据的十位数作为茎，个位数作为叶，将数据依次记录下来，最后填上频数，便可得到以下的茎叶图。

频数	茎	叶　　　　1 | 5 代表15
2	0	9 2
2	1	5 4
1	2	2
8	3	1 8 9 2 8 5 9 7
12	4	9 7 4 1 7 9 9 5 5 7 0 0
7	5	6 4 3 5 0 0 7
5	6	5 6 4 4 8
5	7	4 5 0 4 4
7	8	7 7 8 7 9 4 4

49名学生数学测验成绩的茎叶图

例题 8

下表为26个国家15岁以上的人口的识字率(%)，将这些数据用茎叶图表示。

国家	女生	男生	国家	女生	男生
阿富汗	24	51	印尼	94	97
阿根廷	98	98	伊朗	83	91
孟加拉	58	65	伊拉克	74	86
不丹	55	71	意大利	99	99
巴西	93	92	马来西亚	93	96
柬埔寨	72	85	尼泊尔	55	76
智利	97	97	巴基斯坦	43	70
中国	94	98	菲律宾	97	96
埃及	68	84	葡萄牙	94	97

埃塞俄比亚	41	57	南非	93	96
海地	57	64	斯里兰卡	92	94
匈牙利	99	99	土耳其	93	99
印度	63	81	乌干达	67	81

解：在资料中有分男女生，我们可以将两个茎叶图合并如下。

女生			男生	
频数	叶	茎	叶	频数
1	4	2		0
0		3		0
2	1 3	4		0
4	8 5 7 5	5	1 7	2
3	8 3 7	6	5 4	2
2	2 4	7	1 6 0	3
1	3	8	5 4 1 6 1	5
13	8 3 7 4 9 4 9 3 7 4 3 2 3	9	8 2 7 8 9 7 1 9 6 6 7 6 4 9	14

2|4 代表24

26个国家15岁以上的人口的识字率(%)

思考题

在例题8中，试针对男女生的识字率作简单的评述。

随堂练习 8

根据世界银行的资料，2014年26个国家的人口的平均寿命如下表所示：

国家	平均寿命	国家	平均寿命
阿富汗	60	马来西亚	75
阿根廷	76	荷兰	81
孟加拉	72	挪威	82

不丹	74	尼泊尔	70
巴西	69	巴基斯坦	66
智利	81	菲律宾	68
中国	76	新加坡	83
埃及	71	瑞典	82
埃塞俄比亚	64	斯威士兰	49
印尼	69	坦桑尼亚	65
日本	84	乌干达	58
老挝	66	越南	76
缅甸	66	也门	64

作一茎叶图表示这组数据。

练习 3.3c

1. 某座公寓2007年至2015年每年的人口统计如下表所示：

年份	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
人数	1446	1514	1580	1634	1687	1733	1775	1820	1865

作一线形图表示这组数据。

2. 晓明从9至19岁每年生日时测量身高的数据如下：

年龄	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
身高 (公尺)	1.17	1.3	1.35	1.38	1.45	1.52	1.57	1.64	1.72	1.78	1.78

用线形图表示以上资料，并回答以下的问题。

(a) 估计晓明12岁半时的身高；

(b) 他哪一年增高得最多？

(c) 他在哪一年没有增高？

3. 香港与吉隆坡每月的平均气温 (° C) 如下：

月份	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
吉隆坡	27	28	28	28	28	28	28	28	27	27	27	27
香港	16	18	20	24	26	28	29	29	27	26	22	17

在同一坐标系中画两个线形图以表示这些资料，然后回答以下的问题：

(a) 在哪一个月份两地的平均温度相差最大？

(b) 在哪两个连续的月份中，两地的温差相同？在这个时段内，两个线形图的线段有什么关系？

4. 根据吉隆坡锡矿市场的资料，我国从2004年到2013年的锡矿消耗量(公吨)如下图所示：



2004年至2013年我国锡矿消耗量的线形图

(a) 求这段时间内的最高年消耗量；

(b) 求这段时间内的最低年消耗量；

(c) 这段时间内最低年消耗量较最高年消耗量下降了多少？

(d) 你如何描述这十年来锡矿消耗量的走势？

5. 2003年至2015年全国独中初一新生的总人数如下图所示。



2003年至2015年全国独中初一新生的总人数线形图

(a) 哪几年的新生总人数保持稳定？

(b) 哪一年的新生人数增长最多？

(c) 2015年某报章有一段新闻的标题为“连续12年增长，独中生逾八万创新高”。你认为该标题与线形图的数据有没有矛盾？为什么？

6. 试验30个灯泡的寿命，以小时为单位，记录如下：

168	180	172	176	165	170	169	180	172	168
178	170	178	165	170	168	175	176	178	172
172	165	180	175	180	169	172	175	170	176

作一茎叶图表示这组资料。

直方图与频数多边形

当我们要表示分组的数据或连续性数据的频数分配时，我们可以使用直方图或频数多边形。

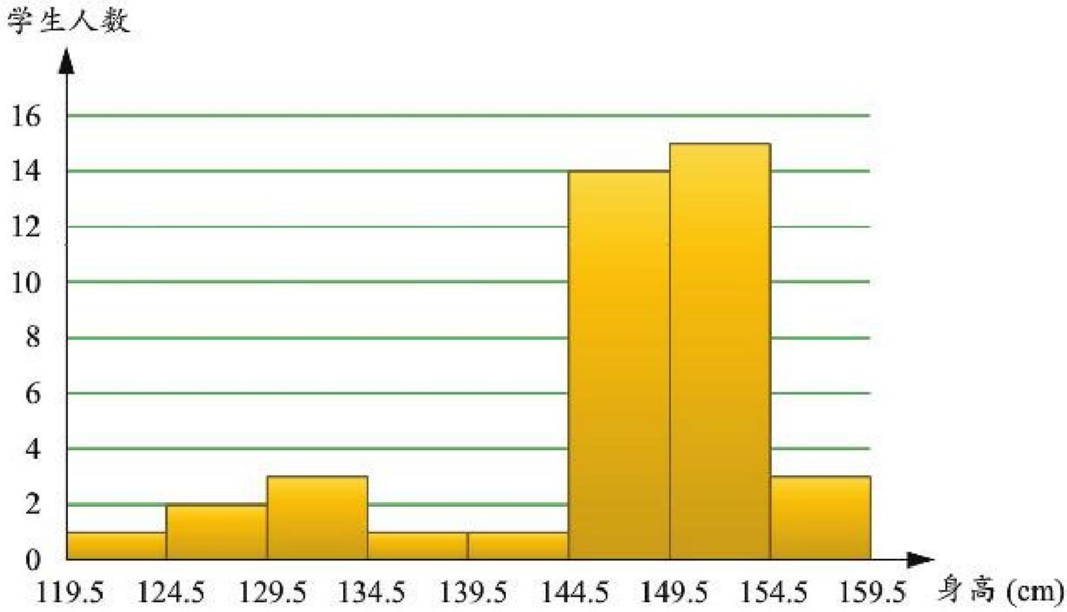
绘制直方图时，我们将频数分配表中各组的上下组界标在横轴上并用长方形的面积表示各组的频数。各长方形的面积必须与各组的频数成正比。当各组的组距相等时，可使用各组的频数作为各长方形的高。

例题 9

下表显示40名学生的身高分配，用直方图表示下表中的资料。

身高 (cm)	频数
120 – 124	1
125 – 129	2
130 – 134	3
135 – 139	1
140 – 144	1
145 – 149	14
150 – 154	15
155 – 159	3

解：



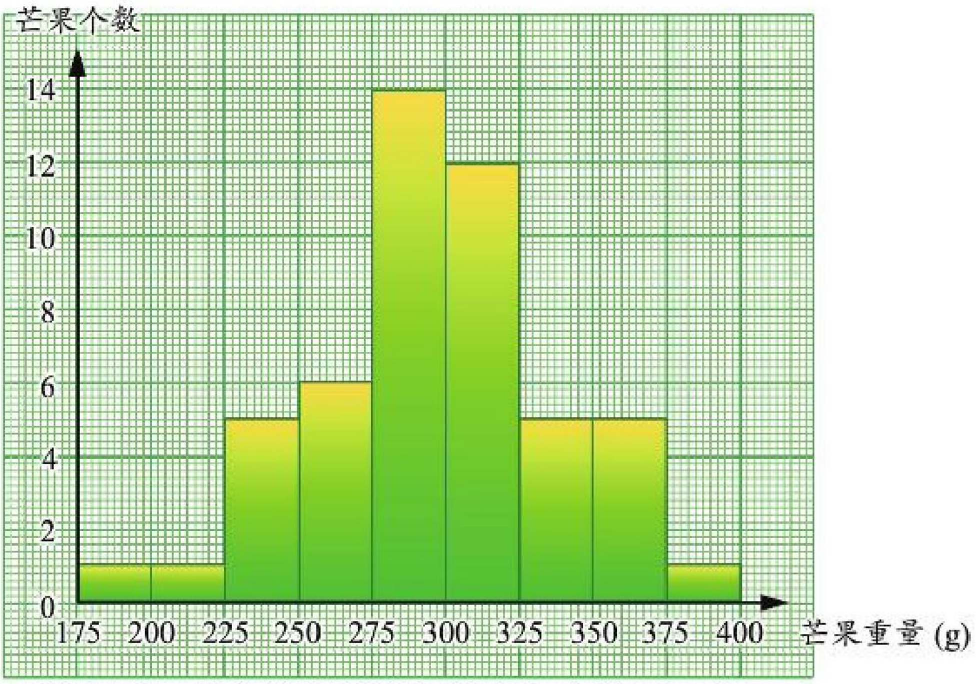
40名学生的身高分配的直方图

例题 10

某生物科技研究员统计果园中50个芒果的重量并整理成以下的表格，用直方图表示表中的资料。

果重 (g)	频数
$175 \le x < 200$	1
$200 \le x < 225$	1
$225 \le x < 250$	5
$250 \le x < 275$	6
$275 \le x < 300$	14
$300 \le x < 325$	12
$325 \le x < 350$	5
$350 \le x < 375$	5
$375 \le x < 400$	1

解：



50粒芒果重量分配的直方图

在绘制频数多边形时，以各组的组中点为横坐标，频数为纵坐标，标出各点，包括第一组之前及最后一组之后以0为频数的两个点，用直线将各点顺序连接起来，就可得频数多边形。

例题 11

利通公司职员的月薪如下，作频数多边形表示这组数据。

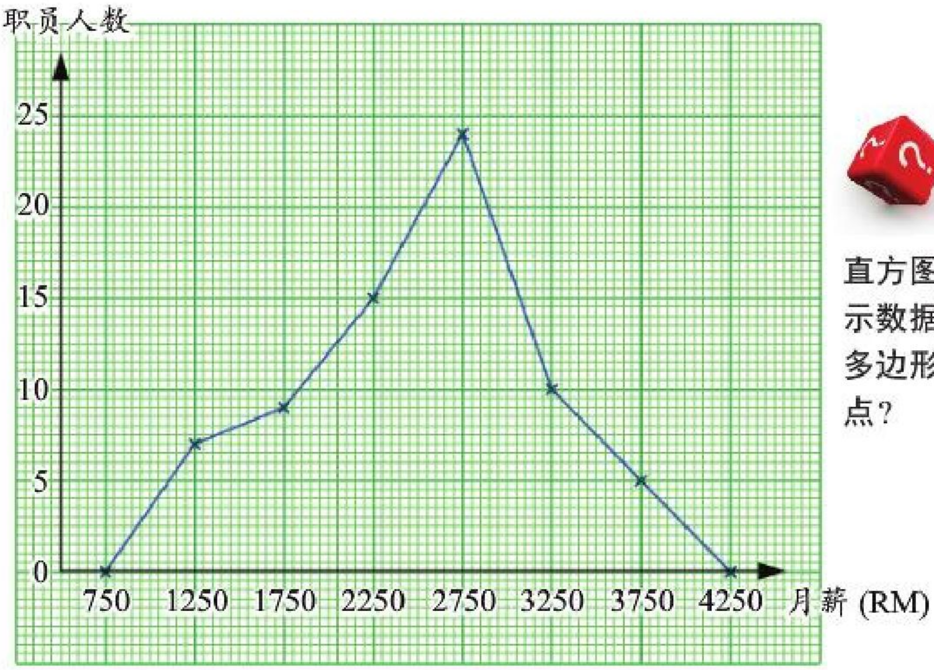
月薪 (RM)	频数
$1000 \le x < 1500$	7
$1500 \le x < 2000$	9
$2000 \le x < 2500$	15
$2500 \le x < 3000$	24
$3000 \le x < 3500$	10
$3500 \le x < 4000$	5

解：

月薪 (RM)	频数	组中点
	0	750
$1000 \le x < 1500$	7	1250
$1500 \le x < 2000$	9	1750
$2000 \le x < 2500$	15	2250
$2500 \le x < 3000$	24	2750
$3000 \le x < 3500$	10	3250
$3500 \le x < 4000$	5	3750
	0	4250

思考题

为什么在画频数多边形时，我们用组中点，而不用组界作图？

(续)


利通公司职员月薪的频数多边形

思考题

直方图与频数多边形都表示数据的频数分配。频数多边形较直方图有什么优点？

随堂练习 9

1. 一公司统计每周所售出的电视机数目，得频数分配表如下：

电视机数目	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
周数	3	17	23	7	2

分别作直方图及频数多边形表示这组数据。

2. 在一次常识问答比赛中，80 名学生所答对的题数分布如下：

题数	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30
频数	3	5	12	30	17	13

作一频数多边形表示这组数据。

练习 3.3d

1. 同时投掷三枚硬币 20 次，出现‘正面’的个数如下：

   2 1 0 2 0 1 1 2 2 3

   1 3 2 1 1 3 1 2 2 1

   (a) 作一频数分配表；

   (b) 分别用直方图及频数多边形表示这些数据。

2. 初中三礼班学生的历史测验分数如下：

66	70	72	76	70	66	63	65	65	67	67
61	60	69	73	82	83	61	76	70	63	76
85	63	60	67	78	79	71	72	68	66	76
78	77	70	72	81	73	76	78	67	73	68
80	78	81	73	58						

   (a) 以 56 – 60，61 – 65，66 – 70，… 分组，作一频数分配表；

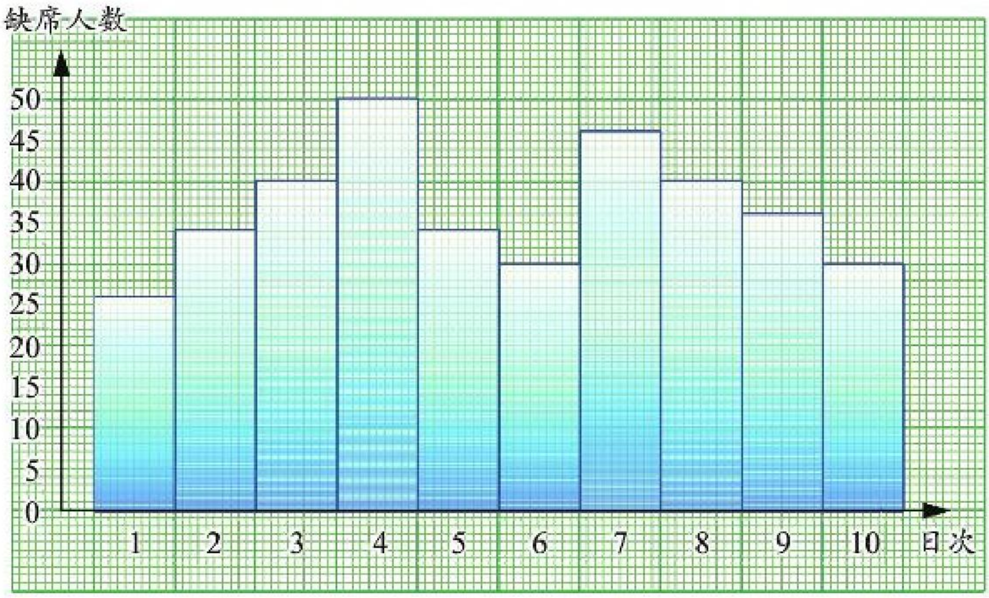
   (b) 以直方图表示以上数据。

3. 调查一座组屋 50 个家庭的孩子人数，得到以下的结果：

孩子人数	0	1	2	3	4	5
家庭个数	4	10	15	8	11	2

   用直方图与频数多边形表示这些资料。

4. 下图是某次流行性感冒中，某校一连十个上课天学生缺席人数的直方图。



(a) 缺席人数最多的是第几天？该天有几位学生缺席？

(b) 哪一天的缺席人数较前一天增加最多？

(c) 哪几天的缺席人数超过35人？

5. 在华明中学全校的调查中，每班乘搭校车上学的学生人数如下：

22	30	38	25	31	45	28	27	41	46	18
32	26	41	37	54	33	42	36	17	44	42
38	17	28	19	41	37	35	36	26	29	40
36	29	35	38	31	39	46	42	25	35	

根据以上的数据，

(a) 求该中学的班数；

(b) 求全距；

(c) 设组距为5，以15为起点作频数分配表；

(d) 以直方图表示上述的调查结果；

(e) 张老师怀疑这组数据中有一个数字可能被错误的记录，你认为哪个数字最可能是记录错误的？为什么？

3.4 累积频数分配表与累积频数多边形

在实际生活中，我们经常需要知道超过某一数字的频数。例如，政府要知道60岁以上的人口有多少，老师想知道考50分以下的学生人数等。制作累积频数分配表及累积频数多边形可以清楚的呈现这些资料。例如，某校42名同龄学生的体重记录如下：

体重 (kg)	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65	65 – 70	70 – 75
频数	1	2	4	8	11	9	5	2

在制作累积频数分配表时，我们列出各组的上组界，并将频数累加，得到累积频数。

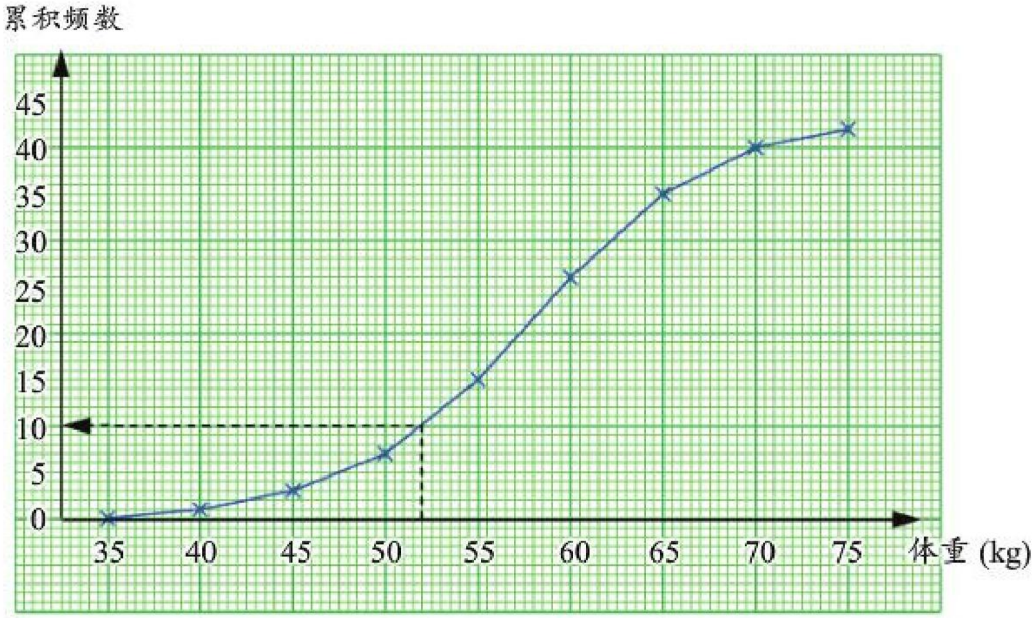
体重 (kg)	频数	体重少过 (kg)	累积频数
35 – 40	1	40	1
40 – 45	2	45	3
45 – 50	4	50	7
50 – 55	8	55	15
55 – 60	11	60	26
60 – 65	9	65	35
65 – 70	5	70	40
70 – 75	2	75	42

表2 学生体重的累积频数分配表

思考题

为什么在这里我们用上组界，而不用组中点？

从表中，我们可以直接读出体重少过 55 kg 的有 15 人，体重大于等于 70 kg 的有 42 − 40 = 2 人。我们也可以看到没有人体重少过 35 kg。因此，我们可以把体重少过 35 kg 的累积频数当作是 0 来作以下的累积频数多边形。



42名学生体重累积频数多边形

利用累积频数多边形我们可以估计一些无法从表中直接看到的数据，例如从图中的虚线，我们可以估计体重少过52 kg的有10人。

在累积频数多边形上，将最高的一点到横轴的垂线分成一百个等份，就可以找出累积频数百分率。

补充资料

如果将累积频数多边形的各点用平滑的曲线连接，所得到的曲线图称为累积频数曲线图。

例题 1

在一测验中，50 名学生的得分如下：

分数	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90
学生人数	1	6	11	14	7	5	3	2	1

(a) 作一累积频数分配表，并绘制累积频数多边形；

(b) 由图中，

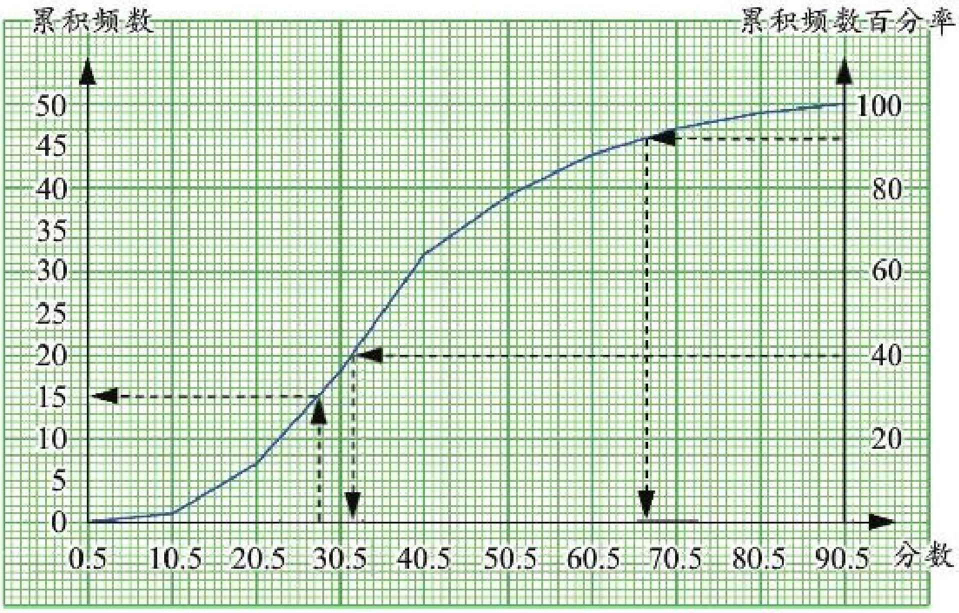
(i) 若 60% 的学生及格，求及格分数；

(ii) 若最好的 8% 的学生得到特优，那么，得到特优的最低分数是多少？

(iii) 有多少人考获 28 分或以上？

解： (a)

分数	学生人数	分数少过	累积频数
1 – 10	1	10.5	1
11 – 20	6	20.5	7
21 – 30	11	30.5	18
31 – 40	14	40.5	32
41 – 50	7	50.5	39
51 – 60	5	60.5	44
61 – 70	3	70.5	47
71 – 80	2	80.5	49
81 – 90	1	90.5	50



50名学生测验成绩的累积频数多边形

(b) (i) 60% 的学生及格，即 40% 的学生不及格。由图中得知得分少于 32 分的学生占 40%，所以 32 分为及格分数。

(ii) $100\% - 8\% = 92\%$ 的学生得不到特优。由图可得，得到特优的最低分数是 68 分。

(iii) 由图中得知少于 28 分的学生有 15 名，所以考获 28 分或以上的学生有 $50 - 15 = 35$ 名。

补充资料

例题 1 中的答案都是根据有限资料估计所得的近似值。

随堂练习 10

一公司统计每周所售出的电视机数目，得频数分配表如下：

电视机数目	$0 \le x < 10$	$10 \le x < 20$	$20 \le x < 30$	$30 \le x < 40$	$40 \le x < 50$
周数	3	17	23	7	2

(a) 作一累积频数多边形；

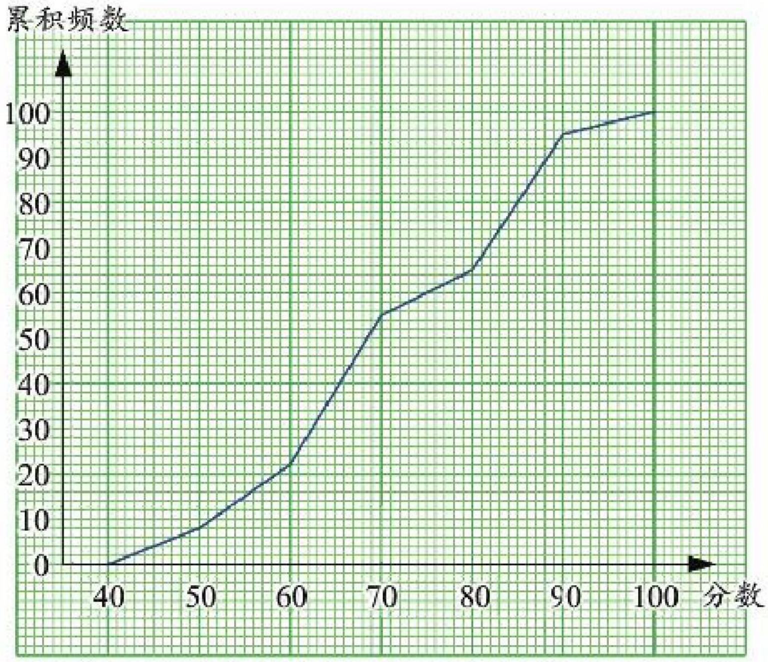
(b) 最后一组的累积频数代表什么？

(c) 估计该公司所卖出的电视机超过 25 台的周数。

制作统计表与统计图的基本原则是要能清晰，合理的呈现数据，以方便解读。在实际用途上，统计图有许多变异的类型，我们无法一一列出，同学们掌握了基本的原则后就可以随机应变地解读一般常见的统计图形。

练习 3.4

1. 下图为新民中学初中二年级全体学生数学成绩的累积频数多边形。



(a) 若 60 分及格，不及格的学生占百分之几？

(b) 考获 60 分至 70 分的学生占百分之几？

(c) 80 分或以上的学生占百分之几？

2. 下表显示某乡村100名居民的年龄分布情况：

年龄	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89
居民人数	8	10	12	12	14	19	13	7	5

(a) 作累积频数分配表；

(b) 作累积频数多边形。

3. 一超市在连续的48天内，每天所售出的汽水瓶数如下：

62	66	57	65	87	89	57	88	75	68	71	67
65	76	76	64	64	60	69	73	70	70	72	77
74	69	74	69	68	66	65	69	73	65	63	72
74	71	67	58	66	78	68	59	62	68	65	61

(a) 以55 – 60，60 – 65，… 分组，作累积频数分配表。

(b) 作累积频数多边形。

4. 某年级的考生在一考试中的分数如下表所示：

分数	1 – 10	11 – 20	21 – 30	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80	81 – 90	91 – 100
考生人数	5	7	5	6	14	15	13	16	11	8

(a) 作一累积频数分配表，并绘制一累积频数多边形。

(b) 若65%的考生及格，求及格分数。

(c) 若45分为及格分数，求及格人数。

5. 一工厂70名工人的月薪如下表所示：

月薪(千令吉)	1.4 – 1.5	1.5 – 1.6	1.6 – 1.7	1.7 – 1.8	1.8 – 1.9	1.9 – 2.0	2.0 – 2.1
人数	8	11	16	15	12	5	3

(a) 作一累积频数分配表及累积频数多边形。

(b) 月薪少于RM 1550的工人有多少名？

(c) 多少工人的月薪至少有RM 1850？

(d) 月薪多过RM 1650但少过RM 2000的工人占多少巴仙？

总复习题 3

1. 以下调查中，哪些适合采用全面调查？哪些适合采用抽样调查？为什么？
   (a) 了解全国中学生的体重分布情况；
   (b) 选出某校 100 米短跑最快的同学参加校际比赛。

2. 某校用投票的方式选举一名学生代表，在1000 张选票中，四名候选人 A，B，C及 D 所得的票数分别是：550，200，150 及 100。用圆形图表示选票的分布情况。

3. 美国波音公司在2009 年至2015 年所交付737 型号飞机的数目如下：

年份	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
飞机数目	372	376	372	415	440	485	495

作一线形图表示这组数据。

4. 某病人在12 小时内每隔两小时的体温记录如下：
   用适合的统计图表示之。

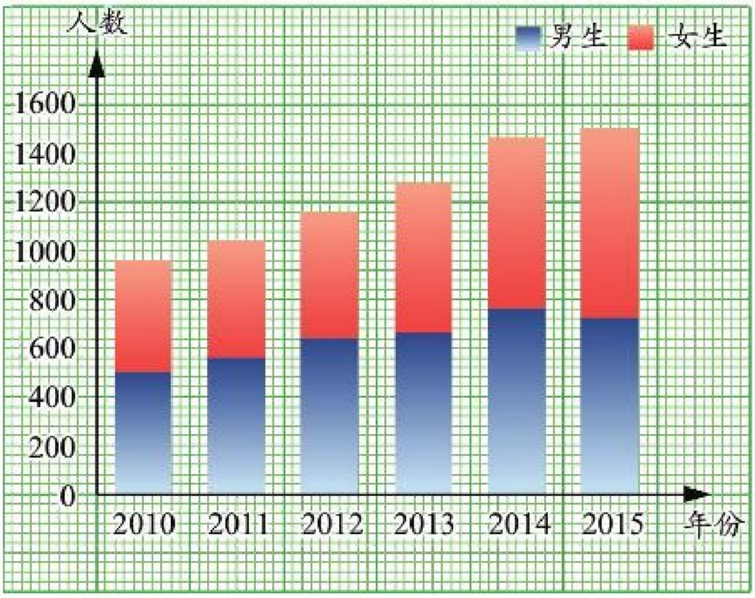
时间	7.00 am	9.00 am	11.00 am	1.00 pm	3.00 pm	5.00 pm	7.00 pm
体温 (°C)	36.2	39.3	40.5	40.6	40.0	39.2	38.6

5. 对 100 个人最喜爱的本地水果进行调查后，所得的结果如下：

本地水果	香蕉	榴梿	芒果	木瓜	红毛丹
人数	30	25	10	15	20

   (a) 将上述资料以 (i) 条形图；(ii) 圆形图表示。
   (b) 在(a) 小题中，哪一个图形较清楚显示出 $\frac{1}{4}$ 的人喜爱榴梿？
   (c) 在(a) 小题中，哪一个图形较能显示出香蕉比榴梿更受人喜爱？

6. 下面的条形图表示明德中学从2010年到2015年男女生的人数：

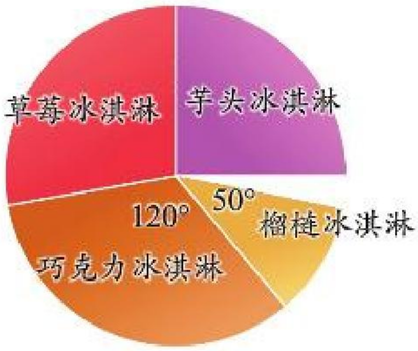


(a) 2010年该校有多少位学生？

(b) 2011年该校有几位男学生？

(c) 2015年该校的女生占百分之几？

7. 右图表示某班学生所喜爱的冰淇淋口味。



(a) 若该班$\frac{1}{4}$的学生喜爱芋头冰淇淋，求该扇形的圆心角。

(b) 求代表草莓冰淇淋的扇形的圆心角。

(c) 若5名学生喜爱榴梿冰淇淋，求全班的人数。

(d) 求班上喜爱草莓冰淇淋的学生的百分率。

8. 下表显示美国与日本人民平均每个月的食物消费量(公斤)。

食物 / 国别	五谷	肉类	鱼	蔬菜	蛋	薯类	糖类	奶类
美国	6.5	9.2	4.5	3.9	5.7	11	2.3	10.7
日本	9.7	3.3	6.5	7.8	3.1	4.5	1.3	5.2

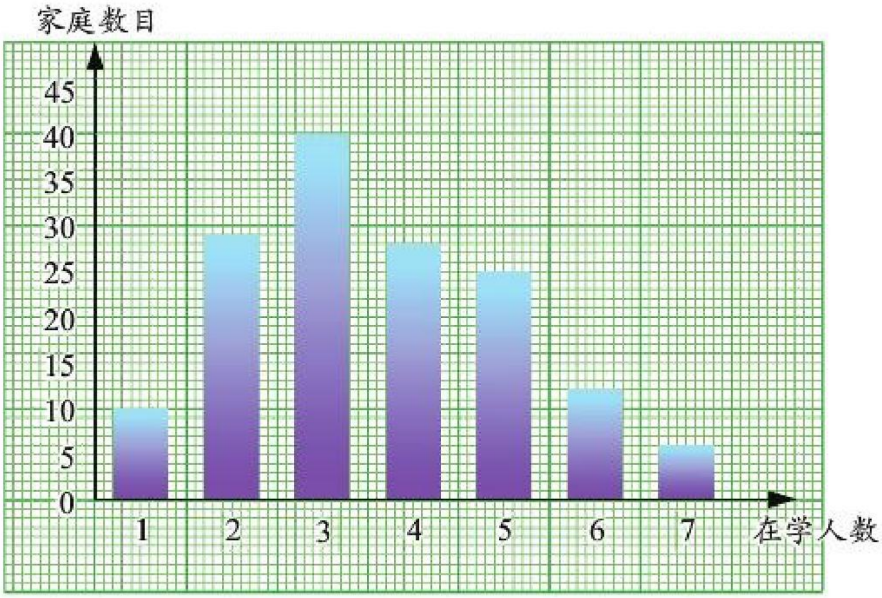
作一条形图表示上述资料并回答以下的问题：

(a) 两国在何种食物的消费量差距最大？差距多少公斤？

(b) 两国在何种食物的消费量差距最小？差距多少公斤？

(c) 从表中，我们能否下结论，糖类是两国人民所最不喜欢的食物？为什么？

9. 某校进行一项家庭访问，调查有关每个家庭中的在学人数，其结果用以下的条形图表示。



根据上图，回答下列的问题。

(a) 接受访问的家庭有几个？

(b) 在学人数最多的家庭有几个？

(c) 在学人数超过三人的家庭占百分之几？

10. 在一个小时内经过某个检查站的汽车数目及汽车内的人数记录如下：

汽车内的人数	1	2	3	4	5	6	7
汽车数目	28	37	16	21	13	5	2

分别用直方图与频数多边形来表示上述的数据。

11. 分别用直方图与频数多边形来表示下表的数据：

智商	55 – 69	70 – 84	85 – 99	100 – 114	115 – 129	130 – 144
人口百分率	2	13	35	36	12	2

12. 在一次科学测验中，总分为100分，一班学生的得分如下：

30	54	33	24	42	60	27	72	78	33
39	24	60	36	30	84	63	63	81	45
29	45	27	66	33	42	78	42	60	9
36	66	39	72	18	18	67	72	95	30

(a) 以0–9，10–19，… 等分组，将上述成绩列成频数分配表；

(b) 作一直方图表示上述成绩。

13. 下表显示初三信班学生在一次测验中所得分数的分布情况：

<table>
<tr><th>分数</th><th>划记</th><th>组中点</th><th>频数</th></tr>
<tr><td>56 – 60</td><td>|||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>61 – 65</td><td>|||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>66 – 70</td><td>||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>71 – 75</td><td>|||</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>76 – 80</td><td>𝍸</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>81 – 85</td><td>𝍸</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>86 – 90</td><td>𝍸 𝍸</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>91 – 95</td><td>𝍸 |</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>96 – 100</td><td>𝍸 ||</td><td></td><td></td></tr>
</table>

(a) 重抄并完成上表；

(b) 有多少学生的分数低于91分且高于61分？

14. 200辆汽车经过一公路测速器时的速率记录如下：

速率 (km/h)	76 – 80	81 – 85	86 – 90	91 – 95	96 – 100	101 – 105	106 – 110	111 – 115
汽车数目	4	13	40	62	52	18	7	4

(a) 作一累积频数分配表及累积频数多边形；

(b) 若这段公路的速限为每小时110公里，有多少辆车超速行驶？

15. 在一项抽样调查中，50个灯泡的寿命分配如下：

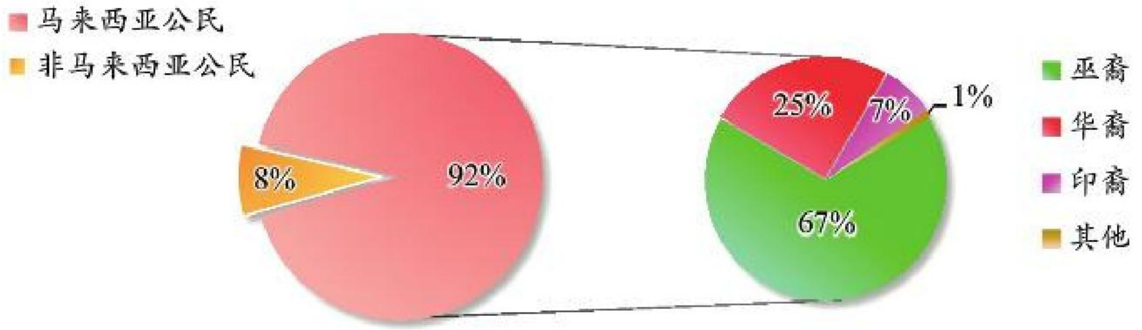
寿命 (小时)	频数
150 – 180	1
180 – 210	4
210 – 240	7
240 – 270	15
270 – 300	10
300 – 330	10
330 – 360	3

(a) 作累积频数分配表及累积频数多边形；

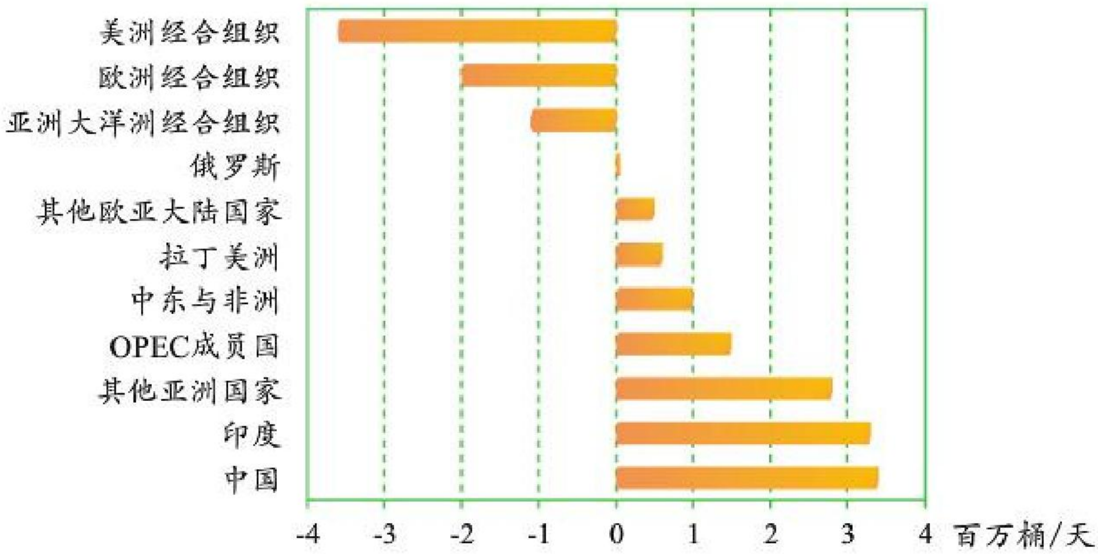
(b) 若寿命超过200小时的灯泡才算合格，估计全体的灯泡中有百分之几是合格的；

(c) 如果舍去灯泡中寿命最长和最短的25%，则寿命为中间50%的灯泡寿命估计会落在哪个范围？

16. 以下的圆形图摘自我国2010年的人口统计报告，计算华人在全国居民中的百分比。



17. 石油出产国组织 (OPEC) 在 2015 年的报告中预测，各区域国家在 2040 年车用汽油的消耗量较 2014 年的增长如下图所示：



从上图估计，2040 年的全球车用汽油耗油量比 2014 年多还是少？

4 集中趋势与四分位数

学习目标

- 能求平均数、中位数及众数
- 能求四分位数



4.1 集中趋势

在频数分配的统计资料中，经常可以发现有大部分数据往往集中在某一点或一个小范围的现象，例如：班上同学的身高，除了特别高或特别矮那几位，大部分都集中在某个小范围内；投掷两粒骰子多次时，得到点数和为 7 的次数会比得到点数和为 2 的次数多，这种现象称为集中趋势。在统计学，我们可以用不同的统计量来描述集中趋势，其中较常用的有算术平均数，中位数及众数。

算术平均数

如果有n个数，x_1，x_2，…，x_n，那么这n个数的算术平均数(简称平均数)为$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$。在统计学上，我们习惯用$\overline{x}$来代表平均数，即

$$\overline{x}=\frac{\text{总和}}{\text{总数}}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

补充资料

$\overline{x}$读作 ‘x bar’。

例题 1

求 3，5，2，6，3，7，9 的算术平均数。

解：

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{3+5+2+6+3+7+9}{7}\\&=\frac{35}{7}\\&=5\end{aligned}$$

例题 2

蔚蔚与萍萍各科的成绩如下表所示：

	华文	国文	英文	数学	科学
蔚蔚	80	73	78	95	79
萍萍	78	67	53	75	83

求他们各自的平均分数。

解： 蔚蔚的平均分数 $= \dfrac{80+73+78+95+79}{5}$

$= 81$

萍萍的平均分数 $= \dfrac{78+67+53+75+83}{5}$

$= 71.2$

例题 3

已知五名男孩的平均体重为 42 公斤。

(a) 求他们的体重的总和。

(b) 若加入另一名体重 63 公斤的男孩，新的平均体重是多少？

解： (a) $\because$ $\dfrac{\text{总体重}}{\text{总人数}} =$ 平均体重

$\therefore$ 五名男孩的体重总和 $= 42 \times 5$

$= 210$ 公斤

(b) 六名男孩的体重总和 $= 210 + 63$

$= 273$

$$\therefore \text{新的平均体重} = \frac{273}{6} = 45.5 \text{ 公斤}$$

随堂练习 1

1. 求下列数据的算术平均数：

   76　70　75　80　81　75　82

2. 在过去的三次平测中，晓丽的平均分数为 82 分。她在第四次平测中至少要得多少分，才能让平均分数保持在 80 分或以上？

练习 4.1a

1. 求下列数据的算术平均数。

   (a) 68　65　81　64　70　80　90　82　65　65

   (b) 1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

2. 一名商人拨了 20 通电话，每次的通话时间 (分钟) 是：

   2　6　2　9　4　7　8　6　1　3

   5　10　1　5　1　3　10　7　5　9

   求这些时间的平均数。

3. 五个数 4，6，8，7，x 的平均数为 6，求 x。

4. 小伟在五个月内平均每个月的花费为 RM 260。若他在第六个月花了 RM 110，求他在这六个月期间，每月的平均花费。

5. 启明中学 1000 名学生之中，有 400 位女生。若全体学生的平均高度为 157 cm，而女生的平均高度为 155.2 cm，问男生的平均高度是多少？

6. 初三某班中，男生的平均体重为52 kg，女生的平均体重为48 kg。那么全班的平均体重是否为50 kg？为什么？

在一次体格检查中，9名学生的高度如下表所示：

高度 (cm)	147	148	149	150	151
频数	1	2	1	3	2

若要求他们的平均高度，我们可以先求他们的高度的总和，即

$$147\times1+148\times2+149\times1+150\times3+151\times2=1344$$

再除以总人数9，也就是频数的总和，即

$$\bar{x}=\frac{147\times1+148\times2+149\times1+150\times3+151\times2}{1+2+1+3+2}$$
$$=\frac{1344}{9}$$
$$=149.3\text{ cm}\quad(\text{准确至1位小数})$$

若以下是一组数据的频数分配表

数据	x_1	x_2	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
频数	f_1	f_2	$\cdots$	f_{n-1}	f_n

则这组数据的平均数为

$$\bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

例题 4

在某住宅区，接受调查的每个家庭的孩子人数如下：

孩子人数	0	1	2	3	4	5
家庭数目	6	12	16	11	10	5

求这些家庭孩子人数的平均数。

解：

孩子人数 x	家庭数目 f	家庭数目×孩子人数 fx
0	6	0
1	12	12
2	16	32
3	11	33
4	10	40
5	5	25
总和	60	142

孩子人数的平均数 $= \frac{142}{60} = 2.37$ （准确至小数二位）

补充资料

计算平均数时，平均人数或个数出现为非整数答案是很常见的。例题 4 的答案可以理解为这个住宅区 100 个家庭的孩子人数估计有 237 名。

随堂练习 2

某天 40 名学生的零用钱记录如下：

数额 (RM)	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50
人数	3	5	11	15	6

求零用钱的平均数。

若频数分配是以组距分组，我们就会丢失部分数据的资讯，在计算平均数时，我们用某一组的组中点代表该组的数据。这样计算出来的平均数只是实际平均数的估计值。

例题 5

以下是20头小牛的体重分布：

体重 (公斤)	130 - 134	135 - 139	140 - 144	145 - 149	150 - 154
频数	4	3	5	6	2

计算它们的平均体重。

解：

体重 (公斤)	组中点 x	频数 f	fx
130 - 134	132	4	528
135 - 139	137	3	411
140 - 144	142	5	710
145 - 149	147	6	882
150 - 154	152	2	304
总和		20	2835

$$\text{平均体重} = \frac{2835}{20} = 141.75 \text{ 公斤}$$

随堂练习 3

30 名学生的身高分布如下：

身高 (cm)	125 - 135	135 - 145	145 - 155	155 - 165	165 - 175
人数	2	5	10	8	5

求平均身高。

练习 4.1b

1. 一足球队在 27 场球赛中，各场的进球数目如下：

进球	0	1	2	3	4	5	6
场数	5	7	4	6	3	0	2

求进球的平均数。

2. 一班学生的数学测验分数分布如下：

分数	50 - 54	55 - 59	60 - 64	65 - 69	70 - 74	75 - 79	80 - 84	85 - 89
频数	4	6	8	16	10	3	2	1

求平均分数。

3. 以下为 20 名学生的身高 (cm)：

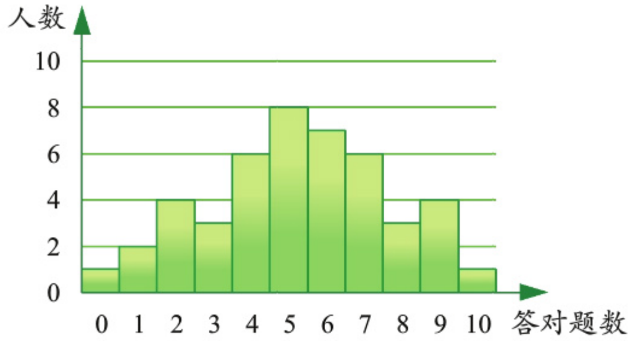
120	123	124	126	125	126	123	126	136	127
137	130	126	122	131	135	129	127	128	125

(a) 计算这 20 名学生的平均身高；

(b) 以 120 – 124，125 – 129，… 分组，将上述资料整理成频数分配表。据此，求这 20 名学生的平均身高；

(c) 为什么 (a) 小题与 (b) 小题的答案不一样？何者比较准确？

4. 在小考中有 10 个题目，右图显示答对题数的学生人数。



(a) 有多少个学生参加这项小考？

(b) 有多少人答对 6 题以上？

(c) 有多少人答对不超过 8 题？

(d) 答对最多题的有多少人？

(e) 最多人答对的题数是多少？

(f) 求平均答对的题数。

5. 初中一年级共有 5 个班，各班学生的人数及平均体重如下：

班别	人数	平均体重 (kg)
忠	40	42
孝	43	40
仁	45	41
爱	37	40
勇	35	41

求初中一学生的平均体重。

6. 下表显示学生在一道数学作答题的得分。

分数	0	1	2	3	4
学生人数	x	5	6	3	2

若平均分数为 2，求 x。

中位数

一般上，算术平均数对于总体有很好的代表性，但却容易受到极端数据的影响。例如，一家小公司的员工月薪为

RM 1720、RM 1960、RM 2050、RM 2550、RM 20020

他们的平均月薪为 RM 5660。

很明显的，这个平均数不能很好的代表员工们的月薪，因为5个员工中有4个的月薪远远的低过 RM 5660。如果将这些月薪依照大小顺序排列，取排正中的数值 RM 2050，就会有两个员工的月薪低过这个数，而另外两个员工的月薪高过它。如此，这个数就比较有代表性。RM 2050 就叫做中位数。

将一组数据由小到大排列后，若数据的项数是奇数，排在正中的只有一项，该项就是中位数。

2　　4　　7　　9　　10　　10　　12

中位数 = 9

若数据的项数是偶数，则排在正中两个数的平均值就是中位数。

4　　6　　7　　9　　9　　10

$$中位数 = \frac{7+9}{2} = 8$$

例题 6

求下列数据的中位数：

(a) 13，7，18，5，9

(b) 5，6，9，3，2，6，7，5

解：(a) 先将数据由小到大排列得

5　　7　　9　　13　　18

（箭头指向 9）

排在正中的是第三项，中位数 = 9。

(b) 先将数据由小到大排列得

2　　3　　5　　5　　6　　6　　7　　9

（箭头指向第四项 5 及第五项 6）

排在正中的是第四项及第五项，中位数 $=\dfrac{5+6}{2}=5.5$。

思考题

求中位数时，我们是否可以将数字从大到小排列？

例题 7

下表为 25 个家庭的孩子人数，求中位数。

孩子人数	0	1	2	3	4	5	6
家庭数目	2	3	7	6	4	2	1

解：例题 7 中，我们所要求的是孩子人数的中位数。将 25 个家庭的孩子人数从小到大排列，中位数是第 13 项。我们可以作累积频数分配表找出第 13 项所对应的孩子人数。

思考题

在这题中，为什么我们不能说中位数是13？

孩子人数	家庭数目	累积频数
0	2	2
1	3	5
2	7	12
3	6	18
4	4	22
5	2	24
6	1	25

（孩子人数为 3 的一行标注：中位数所在组）

∴ 中位数 = 3。

随堂练习 4

1. 求下列数据的中位数：
   (a) 16，15，13，11，10
   (b) 22，8，11，14，20，18
2. 在一项考试中，某校考生考获A等的科目个数如下：

考获A等的科目个数	0	1	2	3	4	5	6
考生人数	30	35	24	18	10	7	2

   求中位数。

众数

在一组数据中出现最多次的数字叫做众数。如果每个数字都只出现相同的次数，那么众数就不存在。如果数据中出现最多次的数字不只一个，那么众数便超过一个。

例题 8

求下列各组数据的众数：

(a) 63，64，60，65，67，63，64，61，64

(b) 3，2，2，5，3，2，2，5，3，3，5，2，3

(c) 3，1，2，4，5

解： (a) 64出现最多次，∴ 众数为64。

(b) 出现最多次的数是2与3，∴ 众数为2与3。

(c) 由于每个数都出现相同的次数，∴ 没有众数。

例题 9

某工厂的雇员薪金如下：

职位	人数	月薪 (RM)
经理	1	11800
管工	1	4000
熟练工人	9	2800
非熟练工人	10	1920
见习生	1	960

求薪金的

(a) 平均数；

(b) 中位数；

(c) 众数。

解：(a) 平均薪金 $= \dfrac{11800+4000+2800\times9+1920\times10+960}{22}$

$= \dfrac{61160}{22}$

$=$ RM 2780

(b) 总人数 $= 22$

将数据由小到大排列后，中位数为第 11 项及第 12 项的平均值。第 11 项为 1920，第 12 项为 2800。

中位数 $= \dfrac{1920+2800}{2} =$ RM 2360

(c) 众数 $=$ RM 1920

随堂练习 5

在 30 天内，4 只母鸡每天所生的鸡蛋总数如下：

2	3	2	1	2	1	0	0	1	2
3	3	3	4	1	4	4	3	4	3
3	2	2	3	2	3	2	1	2	2

(a) 作一频数分配表；

(b) 求每天所生的鸡蛋的平均数，中位数及众数。

练习 4.1c

1. 求下列数据的中位数及众数：

   (a) 1，2，2，2，3，4，4，4，5，6

   (b) 8，5，2，1，8，6，1

   (c) 20，16，14，13，12，10

2. 下列为 35 名学生的身高分布：

身高 (公分)	140	141	142	143	144	145
人数	2	7	10	8	5	3

   (a) 求中位数；

   (b) 求众数。

3. 投掷两枚骰子 30 次，所得的点数之和记录如下：

点数和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次数	0	1	2	4	7	8	3	2	1	1	1

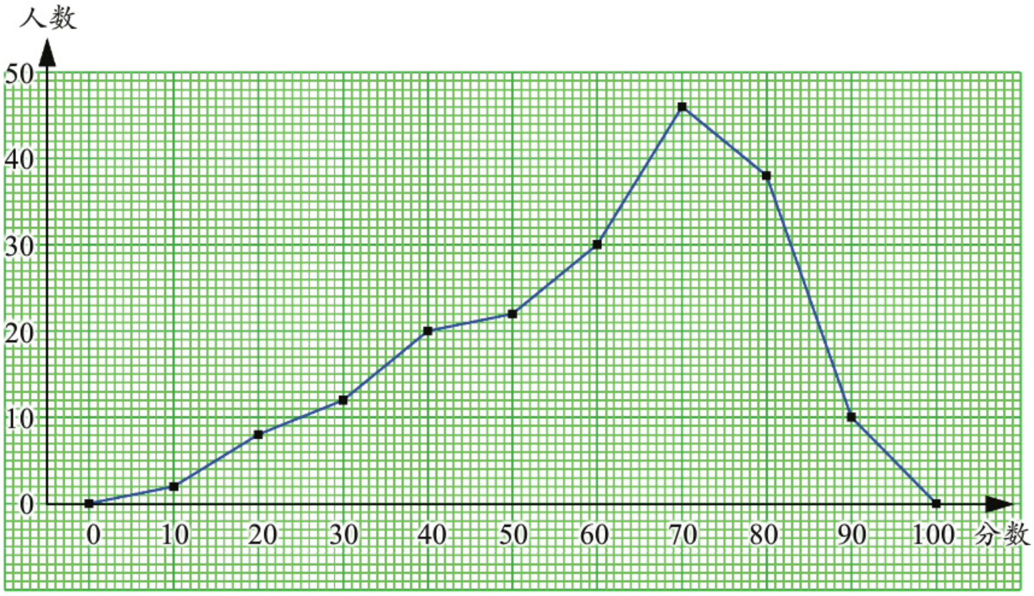
   求平均数、众数及中位数。

4. 利昌公司的职员月薪如下：

职位	人数	月薪 (RM)
经理	1	6000
会计	1	3500
销售人员	3	3000
执行人员	4	3100
外勤	1	2000

求该公司职员月薪的平均数，中位数及众数。

5. 下图为群育中学初中一学生测验成绩的频数多边形。



(a) 共有多少名学生参加测验？

(b) 用这些资料作一频数分配表。

(c) 求中位数，众数及平均分数。

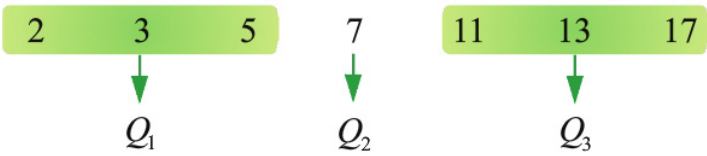
4.2 四分位数

中位数将由小到大排列的数据分割成前后两个项数相等的部分。我们可以分别再求这两个部分的中位数，所求得的这两个数连同原来的中位数叫做四分位数。最小的一个四分位数称为下四分位数，以 Q_1 表示；第二个四分位数即中位数，以 Q_2 表示；第三个四分位数称为上四分位数，以 Q_3 示之。这三个数把数据分割成四个相等的部分。

例题 1

求2，5，3，7，17，11，13的四分位数。

解： 将数据由小到大排列，



先求中位数 Q_2，得 $Q_2=7$。

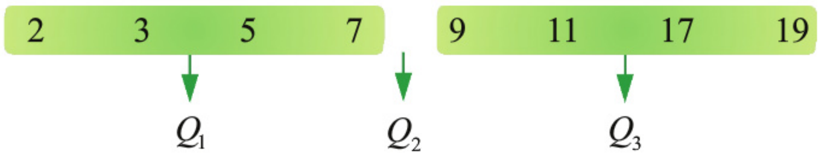
Q_2 将数据分成前后两部分，第一部分的中位数即为 Q_1，第二部分的中位数为 Q_3。

$\therefore$ $Q_1=3$，$Q_3=13$。

例题 2

求5，2，3，7，9，11，19，17的四分位数。

解： 将数据由小到大排列，



$$Q_2=\frac{7+9}{2}=8$$

$$Q_1=\frac{3+5}{2}=4$$

$$Q_3=\frac{11+17}{2}=14$$

随堂练习 6

求下列两组数据的四分位数。

(a) 1，1，3，5，5，7，7，9，9

(b) 1，2，2，8，6，6，3，2，4，3

分组数据的四分位数可由累积频数多边形得出。由于四分位数将数据分成四个项数相等的部分，故从累积频数百分率中，

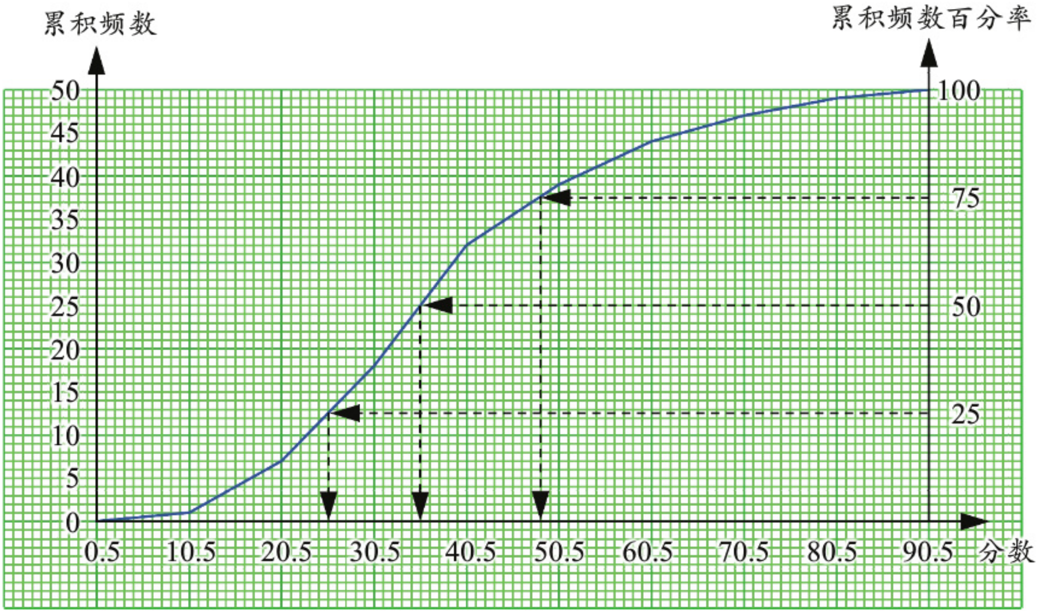
25% 所对应的数值为下四分位数 (Q_1)

50% 所对应的数值为中位数 (Q_2)

75% 所对应的数值为上四分位数 (Q_3)

例题 3

下图为 50 名学生测验成绩的累积频数多边形。从图中，求四分位数。



解： 根据上图，

总人数的 25% 所对应的分数为 Q_1，$Q_1 = 25.5$

总人数的 50% 所对应的分数为 Q_2，$Q_2 = 35.5$

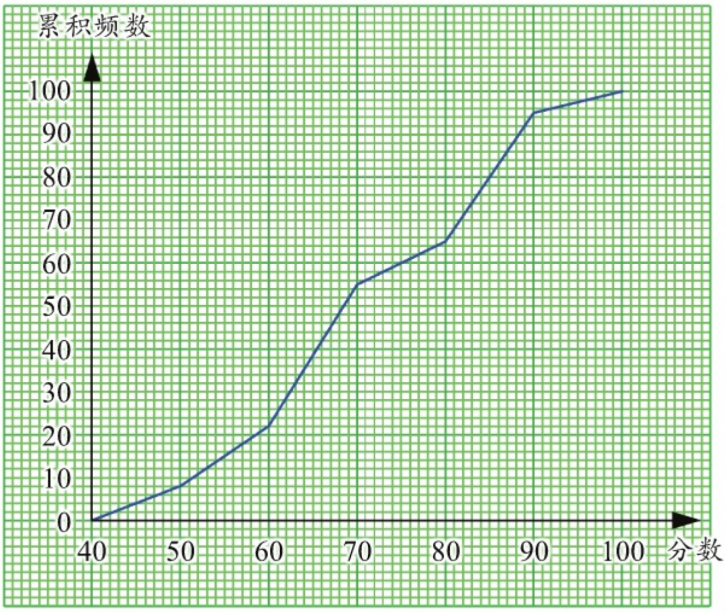
总人数的 75% 所对应的分数为 Q_3，$Q_3 = 48.5$

补充资料

$Q_3 - Q_1$ 称为四分位距，是统计学上常用以描述数据分散程度的统计量。Q_1 到 Q_3 代表数据中间50% 所分布的范围。

随堂练习 7

下图为启德学校初中二年级全体学生数学成绩的累积频数多边形。



从图中，求四分位数。

练习 4.2

1. 求下列各组数据的四分位数。
   (a) 2，3，5，8，6，5，3，8，2，3
   (b) 15，16，18，13，17，11，13，18，14
   (c) 0，0，3，6，2，1，0，3，2，5，4
   (d) 1.3，1.1，2.7，3.2，3.4，2.3，5.4，3.5，2.7，2.9，3.5，2.6
2. 下表显示一工厂工人日薪的频数分配。

日薪 (RM)	31 - 40	41 - 50	51 - 60	61 - 70	71 - 80	81 - 90	91 - 100
人数	12	11	16	21	15	3	2

   (a) 作累积频数分配表及累积频数多边形；
   (b) 求四分位数。

3. 50名学生的英文考试成绩分配如下：

成绩	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60- 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100
人数	4	6	10	15	8	5	2

(a) 作累积频数分配表及累积频数多边形；

(b) 求四分位数；

(c) 若45分为及格分数，求及格学生所占的百分率；

(d) 若85分或以上得A1，求得到A1的学生人数。

总复习题 4

1. 在一组数据中，5，8，6及2的频数分别为3，2，4及1。求算术平均数、中位数及众数。

2. 在满分为20分的数学测验中，20名考生获得的分数如下：

17	15	16	18	13	17	13	11	14	16
15	10	11	14	5	12	14	11	12	6

求平均数、中位数及众数。

3. 鞋厂的经理收集了2000名人士的鞋码作为生产鞋子的依据。哪个集中趋势对他最有用？

4. 试验20个灯泡的寿命，以小时为单位，记录如下：

168	180	172	176	165	170	169	180	172	168
178	170	178	165	170	168	175	176	178	172

求平均数及中位数。

5. 在一项交通调查中，经过一路口的100辆汽车，汽车内的人数及汽车数量如下：

乘车人数	1	2	3	4	5
车数	x	50	y	16	4

(a) 求 $x+y$；

(b) 若每辆车的平均人数为 2.5，证明 $x+3y=66$；

(c) 求 x 与 y；

(d) 求众数。

6. 四人的月薪分别为 RM 5000，RM 6000，RM 6500 及 RM 25000。

(a) 求他们的平均月薪；

(b) 这个平均数是否有代表性？为什么？

7. 在一项打字测试中，参与者的打字速度 (字/分钟) 如下：

打字速度	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60- 70	70 - 80	80 - 90
参与者人数	3	4	7	8	6	2

(a) 求算术平均数；

(b) 求中位数所在组。

8. 一组自然数数据如下：

1　3　4　5　5　6　7　8　x

(a) 求中位数；

(b) 若两个众数相差 3，求 x；

(c) 求四分位数。

9. 将 100 条鱼的重量整理成下表：

重量 (g)	频数
150 - 160	5
160 - 170	9
170 - 180	18
180 - 190	26
190 - 200	20
200 - 210	16
210 - 220	6

(a) 作累积频数多边形；

(b) 求四分位数；

(c) 介于 175 g 至 200 g 之间的鱼占百分之几？

5 相似形

学习目标

- 掌握相似形的性质
- 掌握相似三角形的判定及应用
- 掌握相似形的面积比





上图所示的两张照片，它们是按照不同的比例冲洗出来的。照片中的各个图形，除了大小之外，是“一模一样”的。这就是相似形的例子。

在本章中，我们将学习相似形的性质与判定。

5.1 相似形

形状相同，大小成比例的图形，称为相似形。图5-1所示是一些相似形的例子 。



图 5-1

将一个图形放大或缩小，便可以得到与它相似的图形，如图5-2所示。

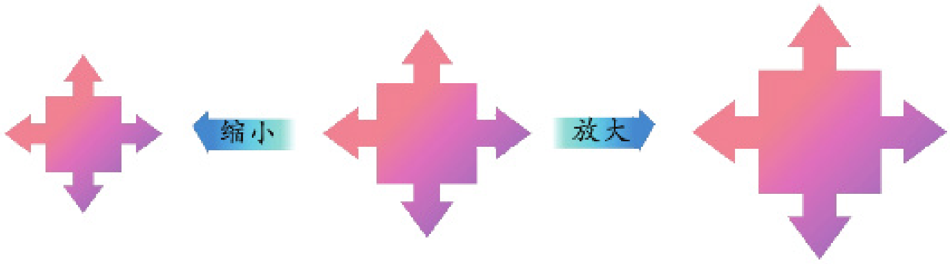


图 5-2

相似图形的形状相同，但大小可能不同。经过适当的放大或缩小后，它们可互相重叠。全等的图形也属于相似图形。如图 5-3 所示，任何两个圆形都相似；任何两个正方形也相似。

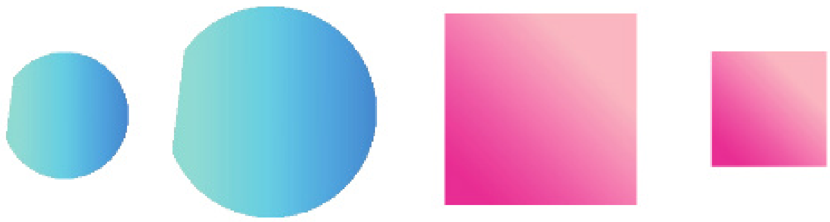


图 5-3

固定一个大于 2 的整数 n，任意两个正 n 边形都是相似的，如图 5-4 所示。

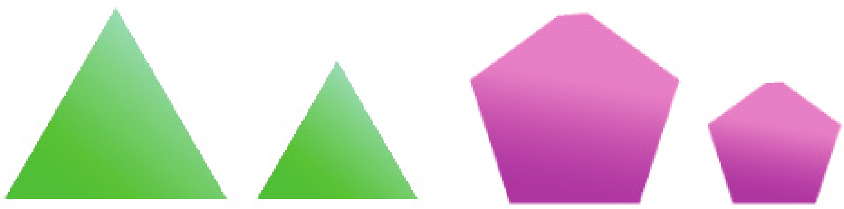


图 5-4

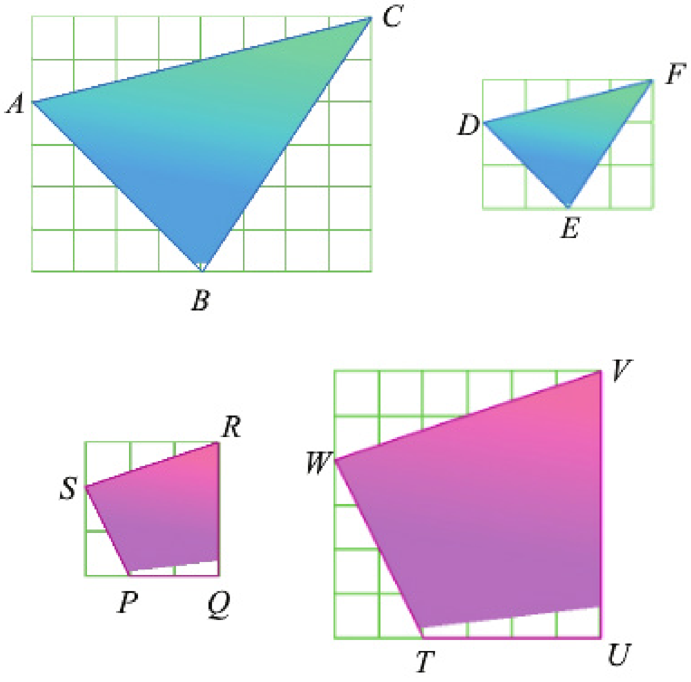


图 5-5

观察图 5-5 可得，ΔABC 与 ΔDEF 相似，四边形 $PQRS$ 与四边形 $TUVW$ 相似，测量各边长可得：

$$\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=2$$

$$\frac{PQ}{TU}=\frac{QR}{UV}=\frac{RS}{VW}=\frac{SP}{WT}=\frac{1}{2}$$

测量各内角可得：

$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$

$\angle P=\angle T$，$\angle Q=\angle U$，$\angle R=\angle V$，$\angle S=\angle W$

对于任意两个相似的多边形，都有以下的性质：

相似多边形的对应角相等，对应边成比例。

反过来，

若两个多边形的对应角相等，对应边成比例，则这两个多边形相似。

我们用符号~来表示相似。例如，在图 5-5 中，$\Delta ABC \sim \Delta DEF$，$PQRS \sim TUVW$。记两个多边形相似时，通常将对应顶点写在对应的位置上。

相似多边形对应边的比称为相似比。例如，在图 5-5 中，ΔABC 与 ΔDEF 的相似比为 2，四边形 $PQRS$ 与四边形 $TUVW$ 的相似比为 $\frac{1}{2}$。

思考题

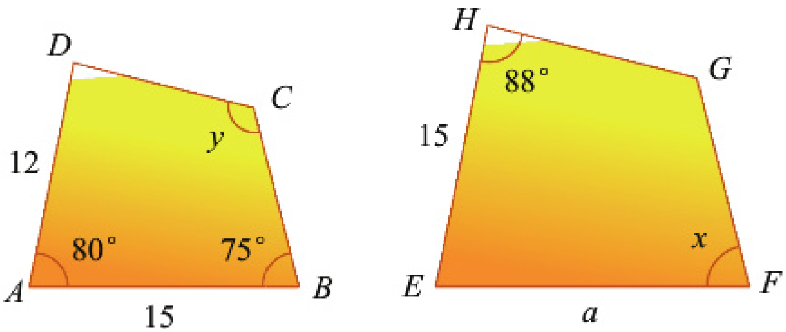
若两个相似图形的相似比等于 1，这两个相似图形有何关系？

思考题

固定一个大于 2 的整数 n，为什么任意两个正 n 边形都相似？

例题 1

下图中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似。求 x，y 及 a。



解： $x = \angle B = 75°$ （对应角相等）

$\angle D = \angle H = 88°$ （对应角相等）

$y + 80° + 75° + 88° = 360°$ （四边形内角和）

$\therefore \quad y = 117°$

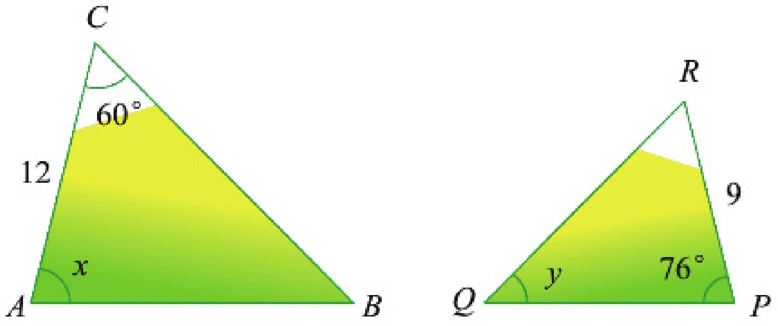
$\frac{EF}{AB} = \frac{EH}{AD}$ （对应边成比例）

$\therefore \quad a = \frac{15}{12} \times 15$

$= \frac{75}{4}$

随堂练习 1

下图中，$\Delta ABC \sim \Delta PQR$。



(a) 求 x 及 y；

(b) 求 $\dfrac{QR}{BC}$。

一般上，两个多边形必须同时满足

- 对应角相等；
- 对应边成比例

这两个条件，才会相似，缺一不可。如图 5-6 (a) 所示的长方形与图 5-6 (b) 所示的正方形，它们的对应角相等，但显然的，它们并不相似。而图 5-6 (b) 所示的正方形与图 5-6 (c) 所示的菱形，它们的对应边成比例，但它们也不相似。

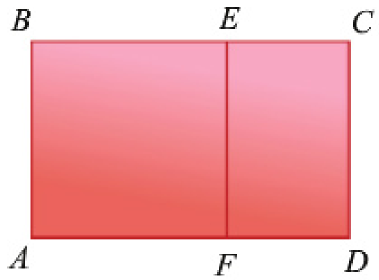


(a) (b) (c)

图 5-6

例题 2

右图中，$ABEF$ 是一正方形。长方形 $ABCD$ 与长方形 $CEFD$ 相似。若 $AB=1$，求 BC 与 DF。



解： 设 $BC=x$，则 $CE=x-1$。

$$\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{CE} \quad \text{(对应边成比例)}$$

$$\frac{x}{1}=\frac{1}{x-1}$$

$$x^2-x-1=0$$

$$\because \quad x>0$$

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4}}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\therefore \quad BC=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$DF=x-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

补充资料

例题 2 中，$\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\frac{DF}{CD}=\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。这两个比例被称为黄金比例。

随堂练习 2

已知长方形 $ABCD$ 与长方形 $PQRS$ 相似，长方形 $ABCD$ 的长与宽各为 6 cm 及 4 cm。若长方形 $PQRS$ 其中一边长 12 cm，求其另一边的长。

例题 3

已知一座建筑物的底部是边长为 30 m 的正方形。若此建筑物的模型高 50 cm，而底部是边长 20 cm 的正方形，求此建筑物的实际高度。



解： 设建筑物的实际高度为 x m。

$$\frac{x\text{ m}}{50\text{ cm}}=\frac{30\text{ m}}{20\text{ cm}}$$

$$x=\frac{30}{20}\times 50$$

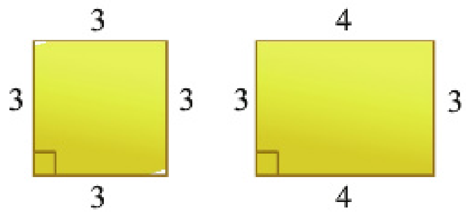
$$=75$$

∴ 建筑物的实际高度为 75 m。

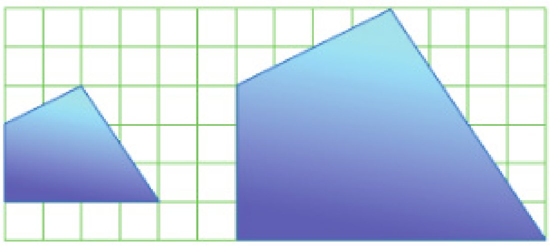
练习 5.1

1. 下列各对图形是否相似？为什么？

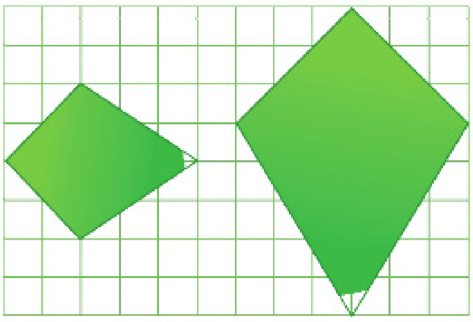
(a)



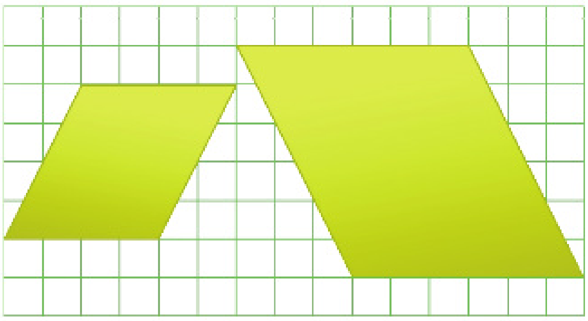
(b)



(c)

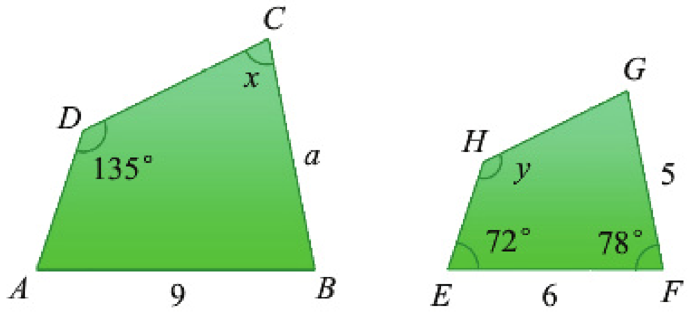


(d)

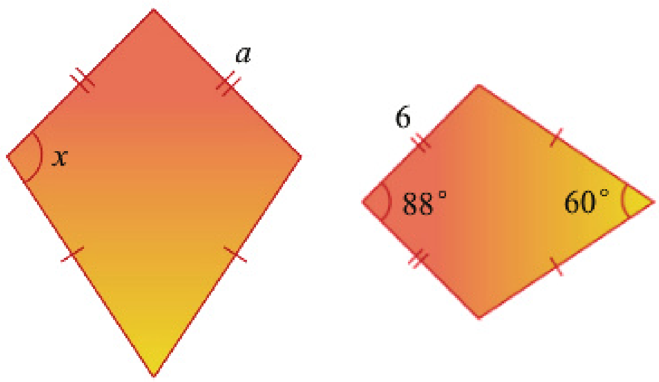


2. 两个长方形，一个的长与宽各为 5 cm 与 4 cm，另一个的长与宽各为10 cm 与 7.5 cm。这两个长方形是否相似？

3. 下图中，$ABCD \sim EFGH$。求 x，y 及 a。



4. 下图所示的两个风筝形相似，相似比为3:2。求 a 及 x。



5. 若长方形 $ABCD$ 与长方形 $EFGH$ 相似，且 AB = 6 cm，BC = 8 cm，长方形 $EFGH$ 的其中一个边长 12 cm，求其邻边的长。

6. 已知两个正方形的边长的比是2:3，求它们面积的比。

7. 一汽车长 4.5 m，高 1.5 m。制造此汽车的模型时，若它的长为30 cm，则模型的高是多少？

5.2 相似三角形的判定与应用

在相似多边形中，最简单的是相似三角形。由上一节，我们知道，若两个三角形相似，则

- 对应角相等；
- 对应边成比例。

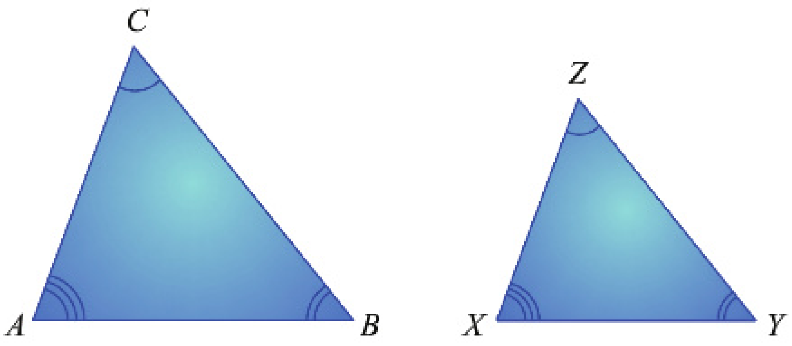


图 5-7

相反的，若 ΔABC 与 ΔXYZ 中，

$\angle A=\angle X$， $\angle B=\angle Y$， $\angle C=\angle Z$，

且 $\dfrac{AB}{XY}=\dfrac{BC}{YZ}=\dfrac{CA}{ZX}$

则 $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$。

两个三角形是否一定要同时满足对应角相等、对应边成比例这两个条件，才会相似呢？在初中二，我们已经讨论过，一个三角形是由三个条件所确定的。更确切的说，两个三角形只要满足 SSS，SAS，AAS 或 ASA，则它们就全等。对于相似三角形，有没有类似的判别方法呢？

两组角对应相等

如图 5-8 所示，作两条不等长的线段 AB 与 PQ。用量角器分别作 $\angle DAB=70°$，$\angle EBA=50°$，$\angle SPQ=70°$，$\angle TQP=50°$。直线 AD 与 BE 的交点为 C，直线 PS 与直线 QT 的交点为 R。

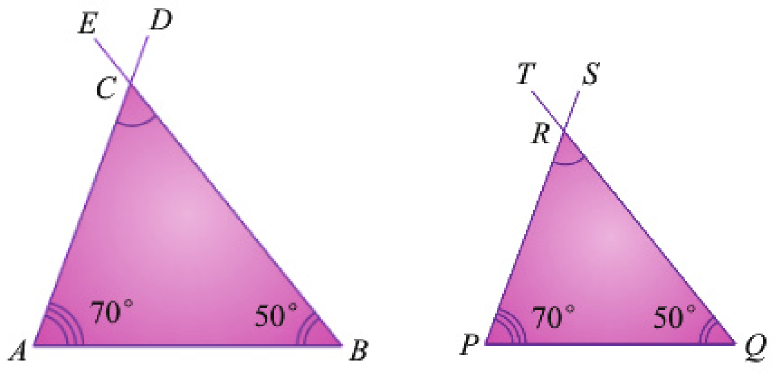


图 5-8

由三角形内角和等于180°可得，

$\angle ACB=180°-70°-50°=60°$

$\angle PRQ=180°-70°-50°=60°$

即，ΔABC 与 ΔPQR 的三个角对应相等。

测量线段AB，BC，CA，PQ，QR，RP的长度，填入下表，并计算对应边的比：

$AB=$______cm	$PQ=$______cm	$\frac{AB}{PQ}=$______
$BC=$______cm	$QR=$______cm	$\frac{BC}{QR}=$______
$CA=$______cm	$RP=$______cm	$\frac{CA}{RP}=$______

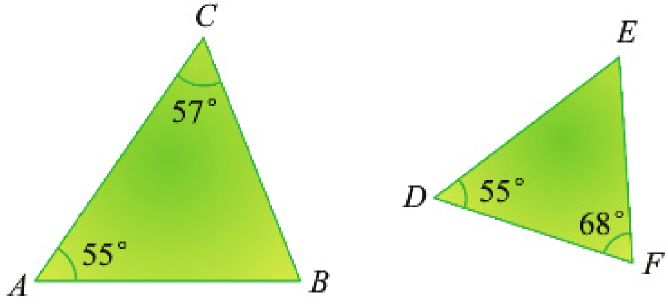
结果我们发现，$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}$。这个结果说明，若两个三角形有两组角对应相等，则它们的对应边成比例。因此，这两个三角形相似。

若两个三角形的两组角对应相等，则它们相似。

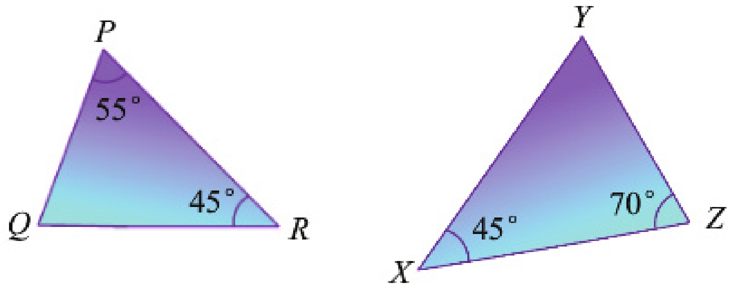
例题 1

判断下列各对三角形是否相似。

(a)



(b)



解： (a) ΔABC 中， $\angle B = 180° - 55° - 57° = 68°$

$\angle A = \angle D = 55°$

$\angle B = \angle F = 68°$

$\therefore\ \Delta ABC \sim \Delta DFE$ (两组角对应相等)

(b) ΔPQR 中， $\angle Q = 180° - 45° - 55° = 80°$

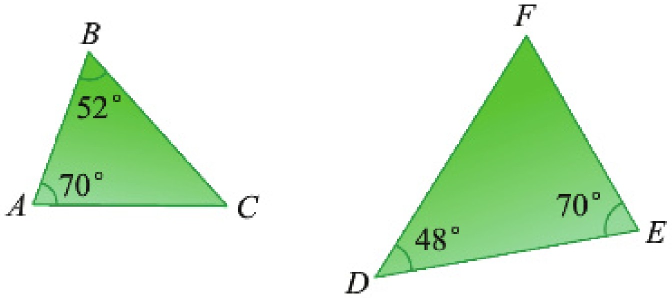
ΔXYZ 中的 $\angle XZY$ 不等于 ΔPQR 中的任何角。

$\therefore\ \Delta PQR$ 与 ΔXYZ 不相似。

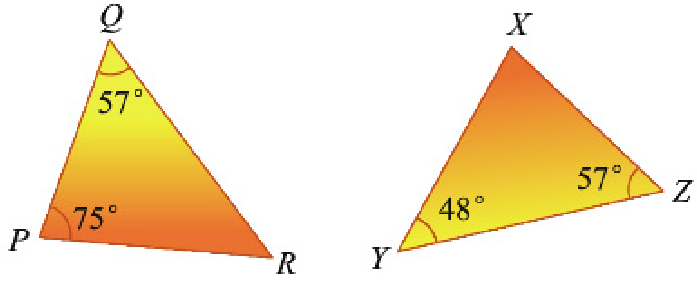
随堂练习 3

判断下列各对三角形是否相似。

(a)

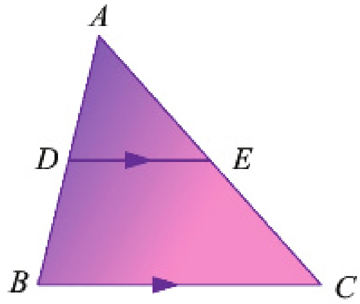


(b)



例题 2

右图中，$DE // BC$。



(a) 证明$\Delta ADE \sim \Delta ABC$；

(b) 证明 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$。

(c) 若 $AD = 4$ cm，$DB = 5$ cm，$AC = 12$ cm，求 EC 的长。

解： (a) $\angle ADE = \angle ABC$　　($DE // BC$，同位角相等)

$\angle A$是公共角

$\therefore \ \Delta ADE \sim \Delta ABC$　　(两组角对应相等)

(b) $\therefore \ \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$　　(对应边成比例)

(c) $AB = 4 + 5 = 9$ cm

$$\frac{4}{9} = \frac{AE}{12}$$

$$\therefore \quad AE = \frac{4}{9} \times 12 = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

$$\therefore \quad EC = 12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

由例题 2 可得

> 平行于三角形一边的直线与三角形其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似。

另外，由 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ 可得

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

$$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

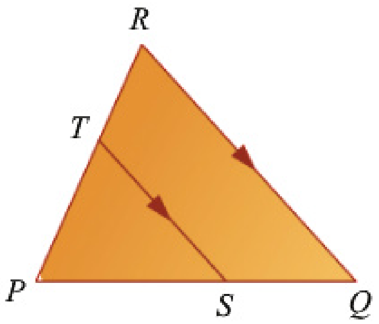
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

即

> 平行于三角形一边的直线截三角形其他两边，所得的对应线段成比例。

例题 3

右图中，$ST // QR$。若 $ST = 6$ cm，$QR = 10$ cm，$TR = 3$ cm，$PQ = 9$ cm，求 PS 及 PT 的长。



解： $\Delta PTS \sim \Delta PRQ$ （$ST // QR$）

$$\frac{PS}{PQ} = \frac{ST}{QR} \quad \text{(对应边成比例)}$$

$$\therefore \quad PS = \frac{6}{10} \times 9 = \frac{27}{5} \text{ cm}$$

$$\frac{PS}{PS + SQ} = \frac{3}{5}$$

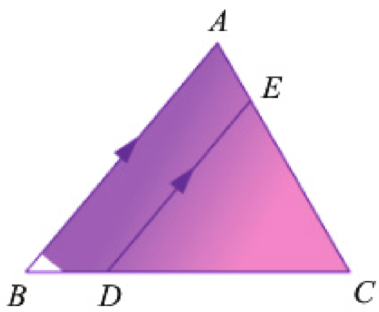
$$\frac{PS}{SQ} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{PT}{TR} = \frac{PS}{SQ} \quad \text{(平行线所截的线段成比例)}$$

$$\therefore \quad PT = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

随堂练习 4

右图中，$DE // BA$。若 $DE = 5$ cm，$CD = 6$ cm，$BD = 2$ cm，$AC = 6$ cm，求 CE 及 AB 的长。



三组对应边成比例

如图 5-9 所示，用直尺及圆规作三角形 ΔABC 及 ΔPQR，它们三边的长分别为 2 cm，3 cm，4 cm 及 3 cm，4.5 cm，6 cm。

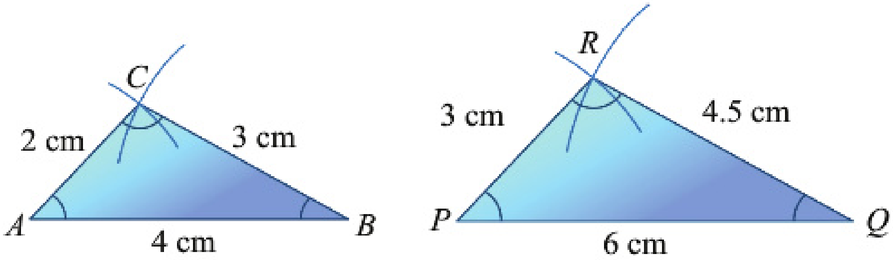


图5-9

$$\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{CA}{RP}=\frac{2}{3}$$

因此，ΔABC 及 ΔPQR 的三边成比例。测量这两个三角形的内角，并填入下表：

$\angle A =$ ______	$\angle P =$ ______
$\angle B =$ ______	$\angle Q =$ ______
$\angle C =$ ______	$\angle R =$ ______

结果，我们发现

$$\angle A=\angle P,\quad \angle B=\angle Q,\quad \angle C=\angle R$$

这个结果显示，当两个三角形的对应边成比例，它们的三组角也对应相等。因此，这两个三角形相似。

> 若两个三角形的三组对应边成比例，则它们相似。

这个定理可以证明如下：

如图 5-10 所示，ΔABC 与 ΔDEF 中，已知 $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$，欲证 $\Delta ABC\sim\Delta DEF$。

在 DE 上取一点 P 使得 $DP=AB$，然后作 $PQ//EF$，则

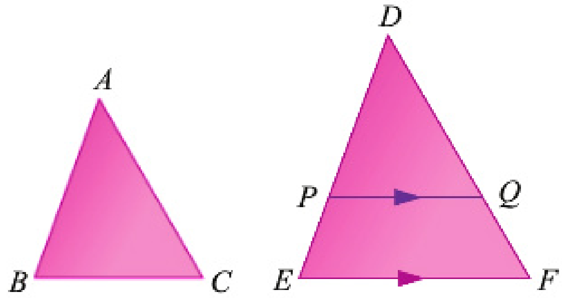


图5-10

$\Delta DPQ\sim\Delta DEF$

$\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF}=\frac{PQ}{EF}$

$\because\ \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$ 且 $DP=AB$

$\therefore\ DQ=AC$，$PQ=BC$

ΔABC 与 ΔDPQ 中，$DP=AB$，$DQ=AC$，$PQ=BC$

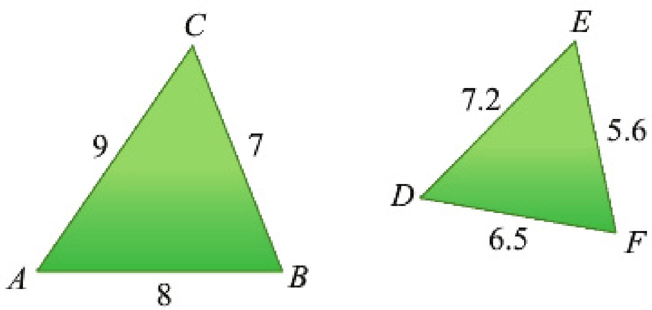
$\therefore\ \Delta ABC\equiv\Delta DPQ$ (SSS)

则由 $\Delta DPQ\sim\Delta DEF$ 可得，$\Delta ABC\sim\Delta DEF$。

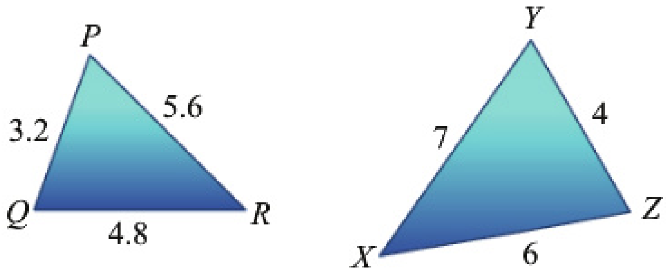
例题 4

判断下列各对三角形是否相似。

(a)



(b)



解： (a) $BC < AB < AC$， $EF < DF < DE$

$$\frac{BC}{EF}=\frac{7}{5.6}=\frac{5}{4},\quad \frac{AB}{DF}=\frac{8}{6.5}=\frac{16}{13}$$

$$\frac{BC}{EF}\neq\frac{AB}{DF}$$

$\therefore$ ΔABC 与 ΔDEF 不相似。

(b) $PQ < QR < PR$， $YZ < XZ < XY$

$$\frac{PQ}{YZ}=\frac{3.2}{4}=\frac{4}{5},\quad \frac{QR}{XZ}=\frac{4.8}{6}=\frac{4}{5},\quad \frac{PR}{XY}=\frac{5.6}{7}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{PQ}{YZ}=\frac{QR}{XZ}=\frac{PR}{XY}$$

$\therefore$ $\Delta PQR \sim \Delta YZX$ （三组对应边成比例）

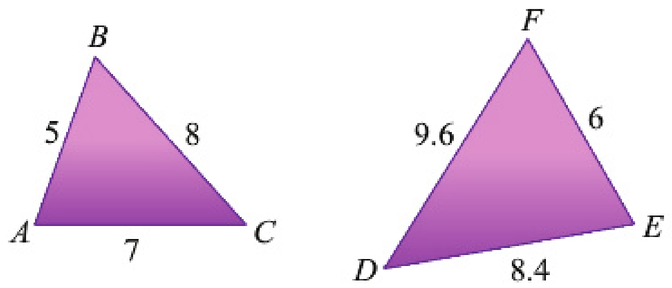
补充资料

由于大边对大角，若两个三角形相似，大的边对应大的角，小的边对应小的角。

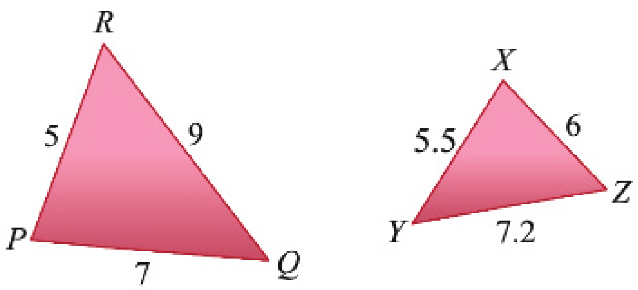
随堂练习 5

判断下列各对三角形是否相似。

(a)



(b)



两组对应边成比例且夹角相等

如图 5-11 所示，用直尺与量角器作 ΔABC 及 ΔPQR，使得 $AB = 4$ cm，$AC = 3$ cm，$\angle A = 60°$，$PQ = 6$ cm，$PR = 4.5$ cm，$\angle P = 60°$。

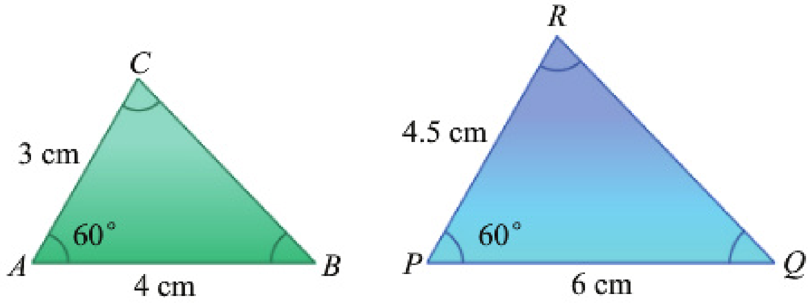


图 5-11

我们有 $\angle A = \angle P = 60°$，$\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} = \dfrac{2}{3}$。

测量 $\angle B$，$\angle C$，$\angle Q$，$\angle R$，BC 及 QR，填入下表，并计算 $\dfrac{BC}{QR}$：

$\angle B =$ ______	$\angle Q =$ ______	
$\angle C =$ ______	$\angle R =$ ______	
$BC =$ ______ cm	$QR =$ ______ cm	$\dfrac{BC}{QR} =$ ______

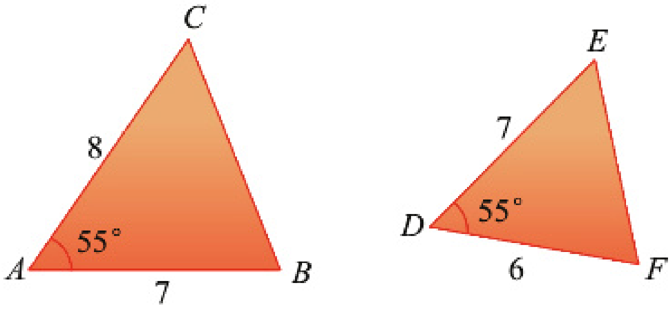
结果我们发现，$\angle B = \angle Q$，$\angle C = \angle R$ 且 $\dfrac{BC}{QR} = \dfrac{2}{3}$。这个结果显示，若两个三角形的两组对应边成比例，且相应的夹角相等，则它们的三个角对应相等，三组对应边成比例。因此，这两个三角形相似。

若两个三角形的两组对应边成比例，且相应的夹角相等，则它们相似。

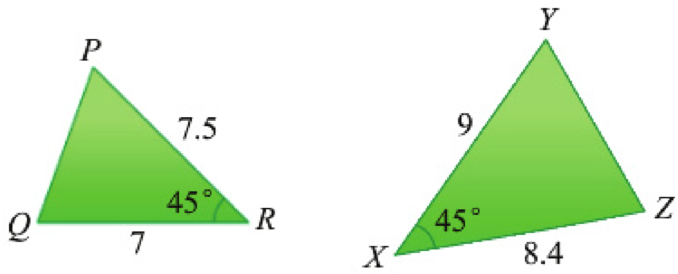
例题 6

下列各三角形都是不等边三角形。判断各对三角形是否相似。

(a)



(b)



解： (a) $\angle A = \angle D = 55°$

$\frac{AC}{DE} = \frac{8}{7}$，$\frac{AB}{DF} = \frac{7}{6}$

$\frac{AC}{DE} \neq \frac{AB}{DF}$

$\therefore$ ΔABC 与 ΔDEF 不相似。

(b) $\angle R = \angle X = 45°$

$$\frac{QR}{XZ} = \frac{7}{8.4} = \frac{5}{6}, \quad \frac{PR}{XY} = \frac{7.5}{9} = \frac{5}{6}$$

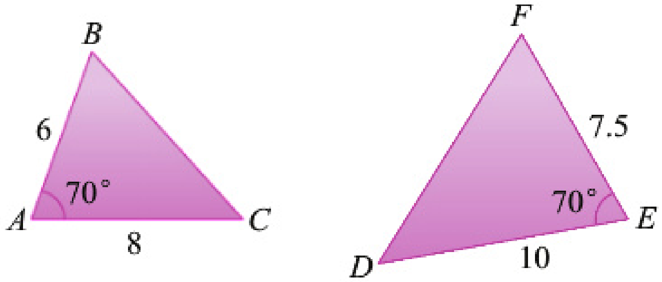
$$\frac{QR}{XZ} = \frac{PR}{XY}$$

$\therefore\ \Delta RPQ \sim \Delta XYZ$ （两组对应边成比例且夹角相等）

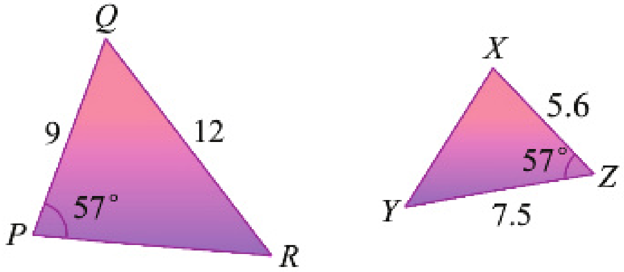
随堂练习 6

下列各三角形都是不等边三角形。判断各对三角形是否相似。

(a)



(b)



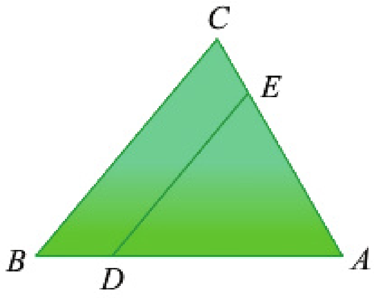
例题 7

右图中，$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}=3$， $DE=6\text{ cm}$，

(a) 证明 $\Delta ADE\sim\Delta ABC$；

(b) 求BC的长；

(c) 证明 $DE//BC$。



解： (a) 由 $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{CE}=3$

可得 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{3}{3+1}=\dfrac{3}{4}$

ΔADE 与 ΔABC 中， $\angle A$ 是公共角， $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$

$\therefore\ \Delta ADE\sim\Delta ABC$ (两组对应边成比例且夹角相等)

(b) $\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AB}{AD}$ (对应边成比例)

$BC=\dfrac{4}{3}\times 6=8\text{ cm}$

(c) $\angle ADE=\angle ABC$ (对应角相等)

$\therefore\ DE//BC$ (同位角相等，两直线平行)

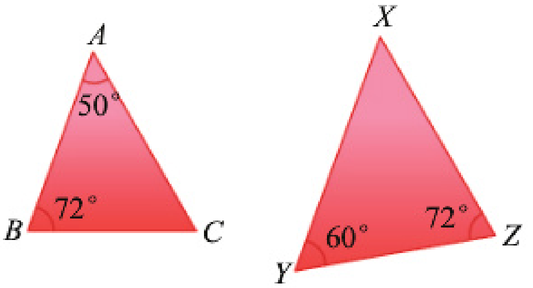
在例题 7 中，我们证明了：

> ΔABC 中，若 D，E 是 AB 与 AC 边上的点使得 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，则 $DE//BC$。

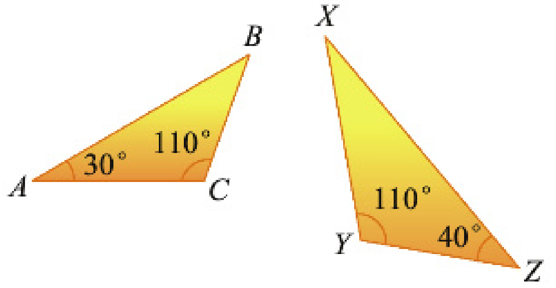
练习 5.2a

判断下列各对三角形是否相似 (1至6)：

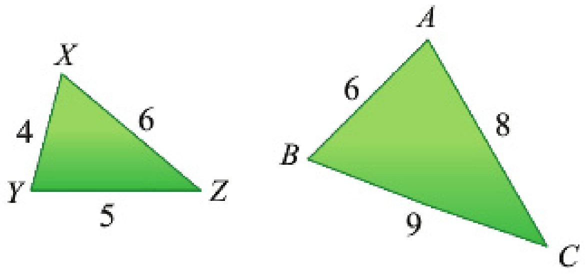
1.



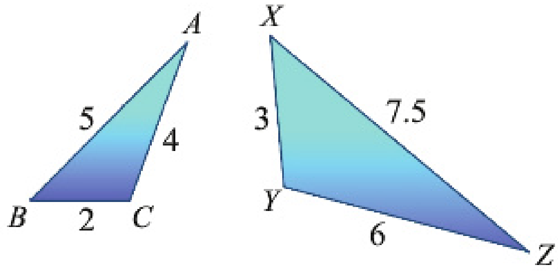
2.



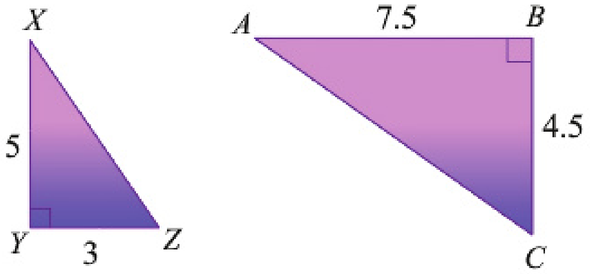
3.



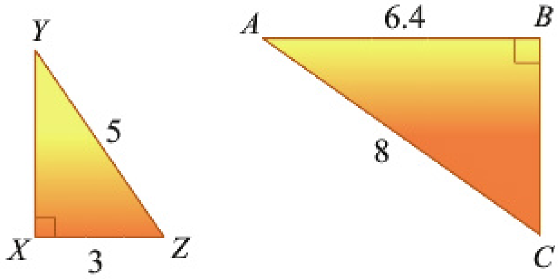
4.



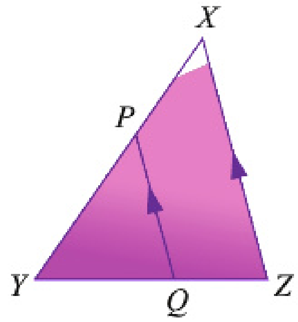
5.



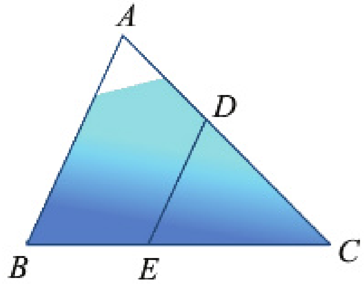
6.



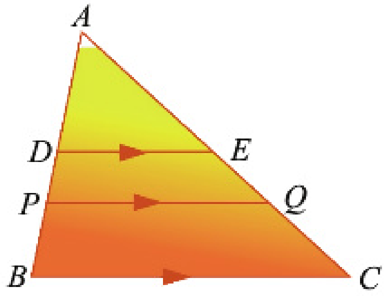
7. 右图中，$PQ // XZ$。若 $PY = 6$ cm， $PX = 4$ cm， $PQ = 5$ cm， $YZ = 8$ cm，求 YQ，QZ 与 XZ 的长。



8. 右图中，$\frac{CD}{AD}=\frac{3}{2}$，$\frac{CE}{CB}=\frac{3}{5}$。若 $DE=4\text{ cm}$，求 AB 的长。



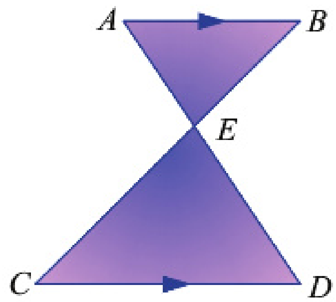
9. 右图中，$DE//PQ//BC$。已知 $\frac{DE}{PQ}=\frac{PQ}{BC}=r$，$AD=49\text{ mm}$，$DB=51\text{ mm}$，$DE=56\text{ mm}$，$AC=120\text{ mm}$，
   (a) 求 r；
   (b) 求 PQ 的长；
   (c) 求 EQ 的长。



相似三角形的应用

例题 8

右图中，$AB//CD$。直线 AD 与直线 BC 相交于点 E。
(a) 证明 $\Delta EAB \sim \Delta EDC$；
(b) 若 $EA=4\text{ cm}$，$EB=5\text{ cm}$，$AB=6\text{ cm}$，$CD=9\text{ cm}$，求 EC 及 ED 的长。



解： (a) $\angle AEB=\angle DEC$ （对顶角相等）
$\angle BAE=\angle EDC$ （$AB//CD$，内错角相等）
$\therefore\ \Delta EAB \sim \Delta EDC$

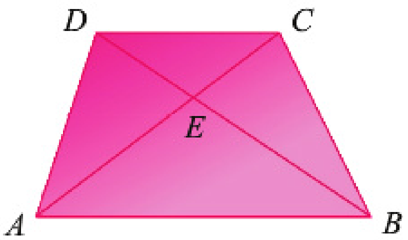
(b) $\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{ED}{EA}$ (对应边成比例)

$\therefore\ EC=\dfrac{9}{6}\times 5=\dfrac{15}{2}$ cm

$ED=\dfrac{9}{6}\times 4=6$ cm

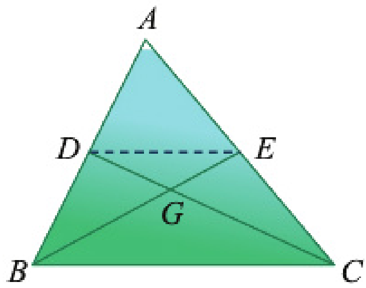
随堂练习 7

右图中，$ABCD$ 是梯形，$AB//DC$，对角线 AC 与 BD 相交于点 E。若 $AB=10$ cm，$CD=6$ cm，$AC=8$ cm，求 AE 的长。



例题 9

右图中，D，E 分别是 AB 与 AC 的中点，CD 与 BE 相交于点 G。证明 $BG:GE=2:1$。



解： 作直线 DE。

$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \Delta ADE\sim\Delta ABC$，$DE//BC$

$\therefore\ \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{1}{2}$ ($\Delta ADE\sim\Delta ABC$，对应边成比例)

$\Delta GDE\sim\Delta GCB$ ($DE//BC$)

$\therefore\ \dfrac{BG}{GE}=\dfrac{BC}{DE}=2$ (对应边成比例)

即，$BG:GE=2:1$。

在例题 9 中，我们证明了

> 一个三角形的重心将它的中线分成两段成 2:1 的比例线段。

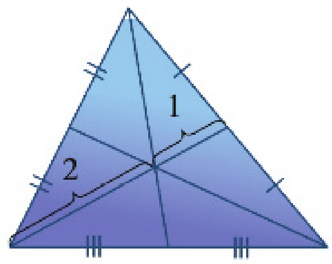
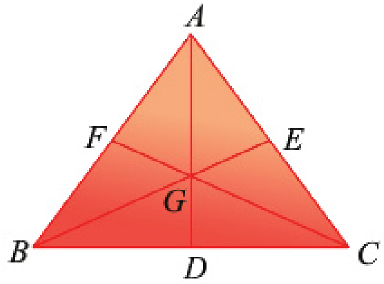


图5-12

随堂练习 8

右图中，ΔABC 是等腰三角形，$AB=AC$。D，E，F 分别是 BC，AC 与 AB 的中点。若 $AB=10\text{ cm}$，$BC=12\text{ cm}$，求 AG，BG 与 BE 的长。

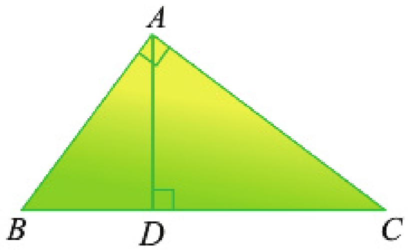


例题 10

右图中，ΔABC 是直角三角形，$\angle A$ 是直角，$AB=15\text{ cm}$，$AC=20\text{ cm}$，AD 是 BC 边上的高。

(a) 证明 $\Delta DBA \sim \Delta ABC \sim \Delta DAC$；

(b) 求 BD，CD 及 AD 的长。



解： (a) ΔDBA 与 ΔABC 中，

$\angle BDA=\angle BAC=90^\circ$

$\angle B$ 是公共角

$\therefore\ \Delta DBA \sim \Delta ABC$ （两组角对应相等）

ΔDAC 与 ΔABC 中，

$\angle ADC=\angle BAC=90^\circ$

$\angle C$ 是公共角

(续) $\therefore \quad \Delta DAC \sim \Delta ABC$ (两组角对应相等)

$\therefore \quad \Delta DBA \sim \Delta ABC \sim \Delta DAC$

(b) $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (毕氏定理)

$BC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 5\sqrt{3^2 + 4^2} = 25 \text{ cm}$

$\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$ ($\Delta DBA \sim \Delta ABC$，对应边成比例)

$\therefore \quad BD = \dfrac{15}{25} \times 15 = 9 \text{ cm}$

$\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$ ($\Delta DAC \sim \Delta ABC$ ，对应边成比例)

$\therefore \quad CD = \dfrac{20}{25} \times 20 = 16 \text{ cm}$

$\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{BD}{AD}$ ($\Delta DBA \sim \Delta DAC$，对应边成比例)

$AD^2 = 9 \times 16$

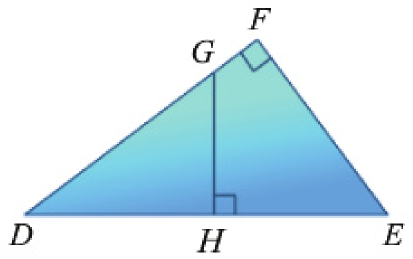
$\therefore \quad AD = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}$

随堂练习 9

右图中，$DF \perp EF$，$GH \perp DE$，$DH = 8 \text{ cm}$，$DG = 9 \text{ cm}$，$DF = 10 \text{ cm}$，

(a) 证明 $\Delta DHG \sim \Delta DFE$；

(b) 求 EH 的长。



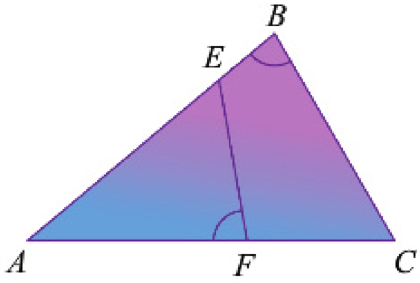
例题 11

右图中，$\angle AFE=\angle ABC$， $AE=8\text{ cm}$， $BE=2\text{ cm}$，
$AF=6.4\text{ cm}$，

(a) 证明 $\Delta AFE\sim\Delta ABC$；

(b) 证明 $AE\cdot AB=AF\cdot AC$；

(c) 求 FC 的长。



解： (a) $\angle A$ 是公共角，

$\angle AFE=\angle ABC$

$\therefore\ \Delta AFE\sim\Delta ABC$ (两组角对应相等)

(b) $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB}$ (对应边成比例)

$\therefore\ AE\cdot AB=AF\cdot AC$

(c) 设 $FC=x\text{ cm}$

$$8\times(8+2)=6.4\times(6.4+x)$$

$$6.4+x=\frac{80}{6.4}$$

$$x=12.5-6.4$$

$$=6.1$$

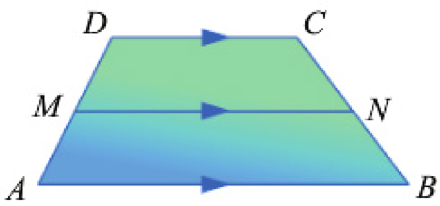
$\therefore\ FC=6.1\text{ cm}$

例题 12

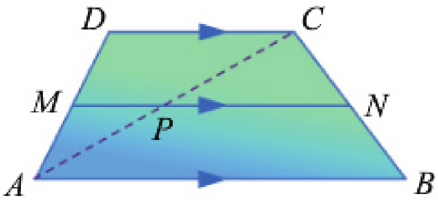
右图中， $AB//MN//DC$。

(a) 证明 $\dfrac{DM}{MA}=\dfrac{CN}{NB}$；

(b) 若 $DM=AM$， $AB=15\text{ cm}$， $CD=9\text{ cm}$，
求 MN 的长。



解： (a) 连 AC 交 MN 于点 P。



$$\frac{DM}{MA}=\frac{CP}{PA} \quad (MP // DC)$$

$$\frac{CN}{NB}=\frac{CP}{PA} \quad (PN // AB)$$

$$\therefore \frac{DM}{MA}=\frac{CN}{NB}$$

(b) $\Delta AMP \sim \Delta ADC \quad (MP // DC)$

$$\frac{MP}{DC}=\frac{AM}{AD} \quad \text{(对应边成比例)}$$

$$\therefore MP=\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}\text{ cm}$$

$\Delta CPN \sim \Delta CAB \quad (PN // AB)$

$$\frac{PN}{AB}=\frac{CN}{CB} \quad \text{(对应边成比例)}$$

$$\therefore PN=\frac{1}{2}\times 15=\frac{15}{2}\text{ cm}$$

$$\therefore MN=\frac{9}{2}+\frac{15}{2}=12\text{ cm}$$

在例题 12 中，我们证明了

> 三条平行线截另两条直线所成的线段成比例。

即，若平行线 AB，CD，EF 分别与直线 l_1 及 l_2 相交于 A，C，E 三点及 B，D，F 三点，如图 5-13 所示，则 $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$。

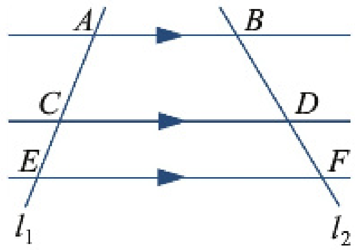


图 5-13

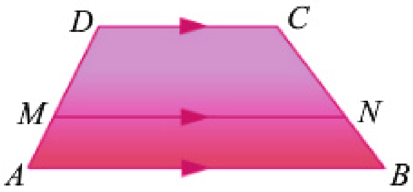
反之，我们可以证明，若 $AB // EF$，点 C 及点 D 分别在线段 AE 及 BF 上使得 $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$，则 $CD // AB // EF$。

思考题

若 $AB // EF$，点 C 及点 D 分别在线段 AE 及 BF 上使得 $\frac{AC}{CE}=\frac{BD}{DF}$，证明 $CD // AB // EF$。

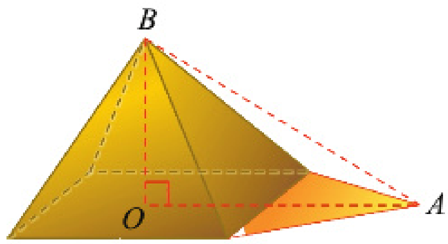
随堂练习 10

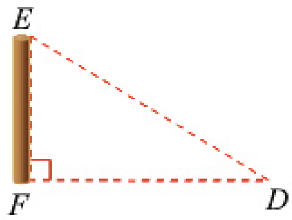
右图中，$AB // MN // DC$。若 $\frac{DM}{AM}=2$，$AB=15\text{ cm}$，$CD=9\text{ cm}$，求 MN 的长。



例题 13

根据史料记载，古希腊数学家、天文学家泰勒斯曾利用相似三角形的原理来测量金字塔的高度。如右图所示，如果木杆 EF 长 2 m，它的影子 FD 长 3 m，OA 长 201 m，求金字塔的高度 OB。





解： 太阳的光线是平行的，

$\therefore\ \angle BAO=\angle EDF$

$\angle BOA=\angle EFD=90^\circ$

$\therefore\ \Delta BOA\sim\Delta EFD$ (两组角对应相等)

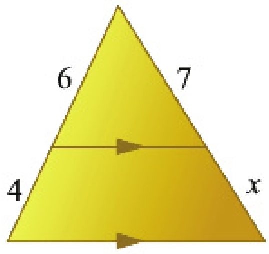
$\therefore\ \frac{OB}{EF}=\frac{OA}{FD}$ (对应边成比例)

$\therefore$ 金字塔的高度 $OB=\frac{201}{3}\times 2=134\text{ m}$。

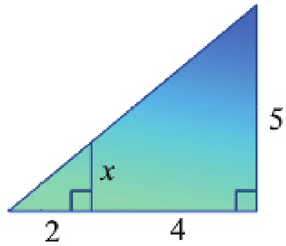
练习 5.2b

下列各图中，求 x，y，z（1 至 10）：

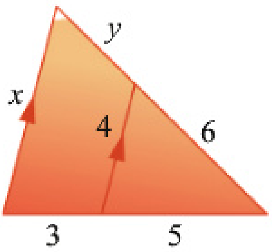
1.



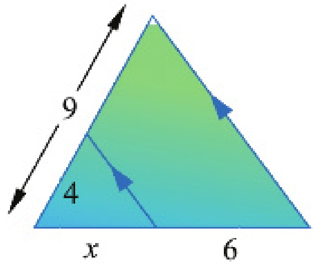
2.



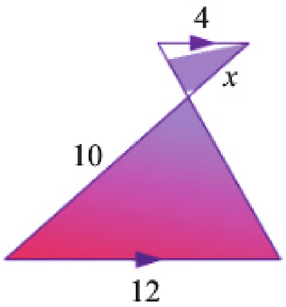
3.



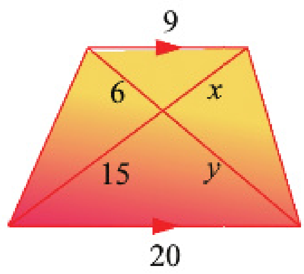
4.



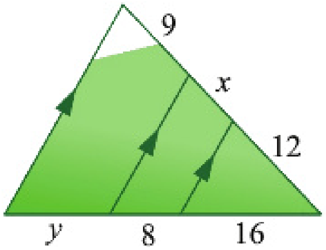
5.



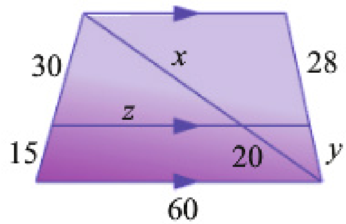
6.



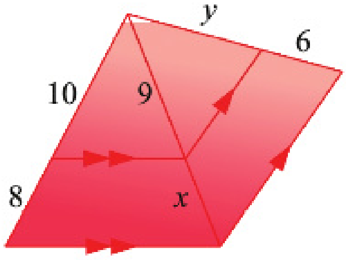
7.



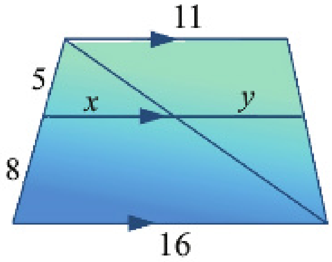
8.



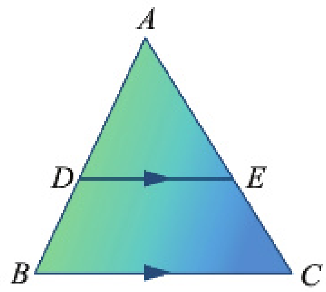
9.



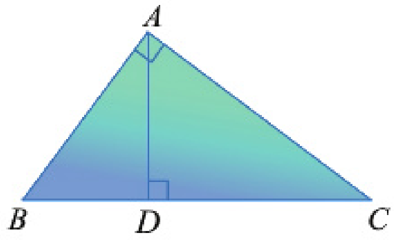
10.



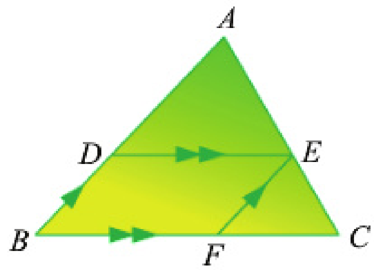
11. 右图中，$DE//BC$，$AB=9\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$，$DE=6\text{ cm}$，
(a) 证明$\Delta ADE\sim\Delta ABC$；
(b) 求BD的长。



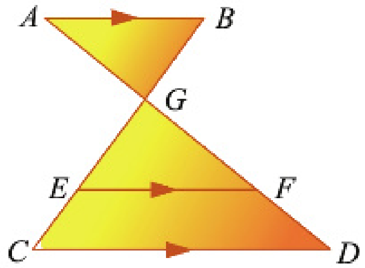
12. 右图中，$BD=4\text{ cm}$，$CD=9\text{ cm}$，
(a) 证明$\Delta ADB\sim\Delta CDA$；
(b) 求AD的长。



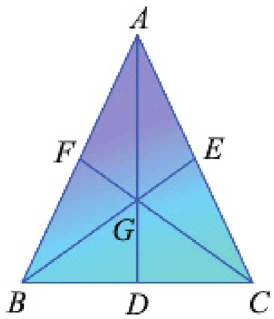
13. 右图中，$DE//BC$，$EF//AB$。已知$AB=12\text{ cm}$，$AE=6\text{ cm}$，$EC=4\text{ cm}$，$BF=8\text{ cm}$，求CF的长。



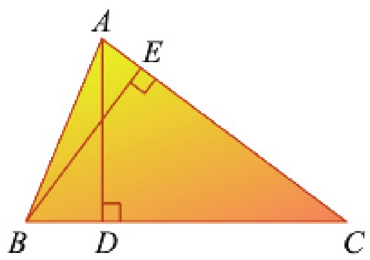
14. 右图中，$AB//EF//CD$，$AB=8\text{ cm}$，$EF=9\text{ cm}$，$GF=7.5\text{ cm}$，$FD=5\text{ cm}$，$BC=16\text{ cm}$。求CD，AD与CE的长。



15. 右图中，$AB=AC=13\text{ cm}$，$BC=10\text{ cm}$，AD，BE，CF是中线。求AD，GD，BG及BE的长。



16. 右图中，$AD=12\text{ cm}$，$BC=21\text{ cm}$，$AC=20\text{ cm}$。
(a) 证明$\Delta CDA\sim\Delta CEB$；
(b) 求BE的长；
(c) 求CE，CD及AB的长。



5.3 相似形的面积比

两个图形相似，它们的面积之间有什么关系呢？

如图 5-14 所示是两个正方形，它们的边长各为 3 及 5，因此，它们的面积各为 9 及 25。我们注意到，这两个正方形的相似比是 $\frac{3}{5}$，而它们的面积比是 $\frac{9}{25}=\left(\frac{3}{5}\right)^2$。

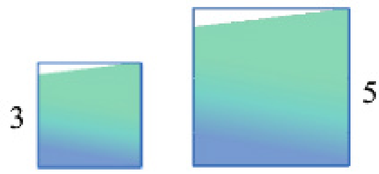


图5-14

我们来探讨一般的情况：

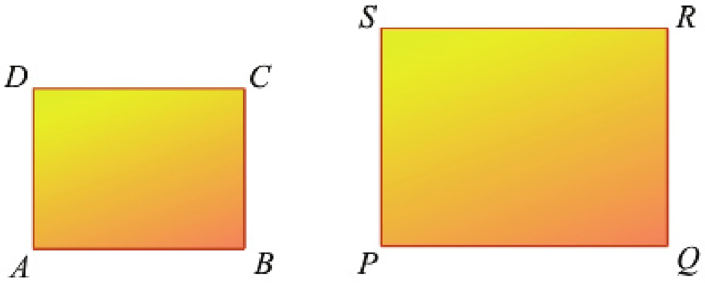


图 5-15

如图5-15所示，长方形 $ABCD$ 与长方形 $PQRS$ 相似，它们的相似比是 k，即 $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=k$，则

$$\frac{\text{长方形 } ABCD \text{ 的面积}}{\text{长方形 } PQRS \text{ 的面积}}=\frac{AB\times BC}{PQ\times QR}$$
$$=\frac{AB}{PQ}\times\frac{BC}{QR}$$
$$=k^2$$

即相似长方形的面积比等于相似比的平方。

由此可得，对于两个相似的直角三角形 (图5-16)，它们的面积比也等于相似比的平方。

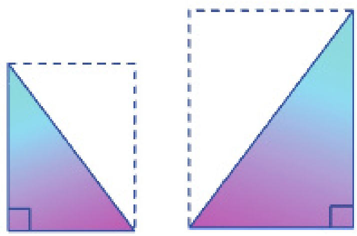


图5-16

任一三角形的面积是两个直角三角形面积的和(图5-17)，因此两个相似三角形的面积比也等于相似比的平方。

任一多边形的面积都是若干个三角形面积的和，因此两个相似多边形的面积比也等于相似比的平方。

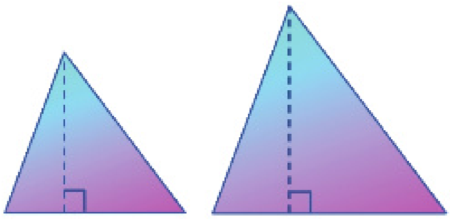


图5-17

思考题

两个相似三角形对应边上的高的比与相似比有什么关系?

相似形面积的比等于相似比的平方。

例题 1

右图所示的两个正五边形的边长之比是10:7。若小的正五边形的面积是98 cm^2，求大的正五边形的面积。



解： 两个正五边形相似。

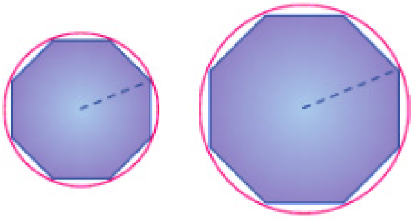
$$\frac{\text{大的正五边形的面积}}{\text{小的正五边形的面积}}=\left(\frac{\text{大的正五边形的边长}}{\text{小的正五边形的边长}}\right)^2$$

$$\text{大的正五边形的面积}=\left(\frac{10}{7}\right)^2\times 98$$

$$=200\ \text{cm}^2$$

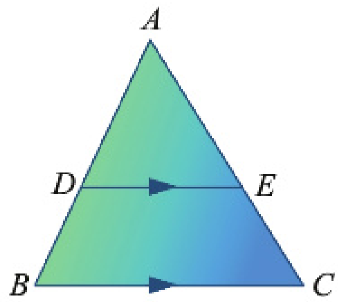
随堂练习 11

右图所示为两个圆内接正八边形。若两个正八边形的面积之比是4:9，求两个圆的半径之比。



例题 2

右图中，$DE // BC$，$AD = 5$ cm，$BD = 4$ cm。若 ΔADE 的面积为 $15\ \text{cm}^2$，求 ΔABC 及梯形 $BCED$ 的面积。



解： $\because DE // BC$

$\therefore \Delta ADE \sim \Delta ABC$

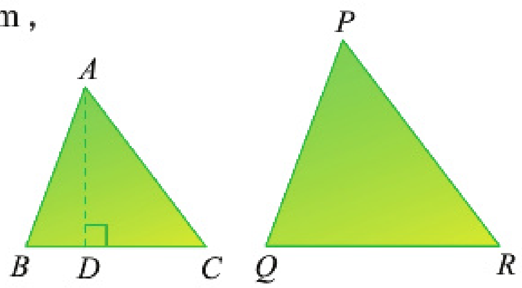
$$\frac{\Delta ABC\text{的面积}}{\Delta ADE\text{的面积}} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2$$

$$\Delta ABC\text{的面积} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \times 15 = \frac{243}{5}\ \text{cm}^2$$

$$\text{梯形 } BCED \text{ 的面积} = \frac{243}{5} - 15 = \frac{168}{5}\ \text{cm}^2$$

例题 3

右图中，$\Delta ABC \sim \Delta PQR$。若 $BC = 6$ cm，$AD = 5$ cm，$QR = 9$ cm，求 ΔPQR 的面积。

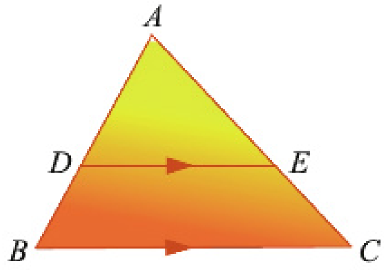


解：
$$\frac{\Delta PQR\text{的面积}}{\Delta ABC\text{的面积}} = \left(\frac{QR}{BC}\right)^2$$

$$\Delta PQR\text{的面积} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = \frac{135}{4}\ \text{cm}^2$$

随堂练习 12

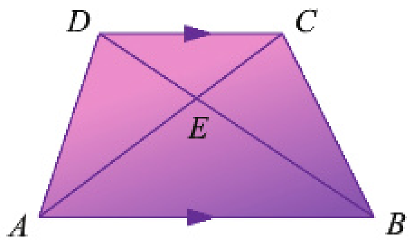
右图中，$DE//BC$，$AD=6\text{ cm}$，$BD=4\text{ cm}$。若梯形 $BCED$ 的面积为 20 cm^2，求 ΔADE 与 ΔABC 的面积。



在初中二，我们证明过，等高三角形的面积比等于底边长的比。事实上，利用面积比可以处理很多平面几何的问题。

例题 4

右图中，$DC//AB$，ΔCDE 与 ΔABE 的面积分别为 18 cm^2 及 50 cm^2。求 ΔBCE 的面积及梯形 $ABCD$ 的面积。



解： $\because\ DC//AB$

$\Delta CDE \sim \Delta ABE$

$$\left(\frac{BE}{DE}\right)^2=\frac{\Delta ABE\text{的面积}}{\Delta CDE\text{的面积}}$$

$$=\frac{50}{18}$$

$$\frac{BE}{DE}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

ΔBCE 与 ΔCDE 等高

$$\therefore\ \frac{\Delta BCE\text{的面积}}{\Delta CDE\text{的面积}}=\frac{BE}{DE}$$

$$\Delta BCE\text{的面积}=\frac{5}{3}\times 18=30\text{ cm}^2$$

(续) ΔADE 与 ΔABE 等高

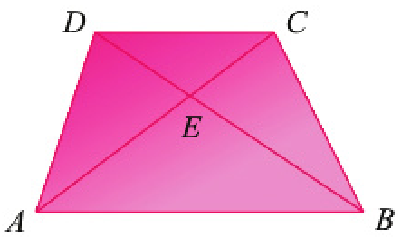
$$\therefore \quad \frac{\Delta ADE\text{的面积}}{\Delta ABE\text{的面积}}=\frac{DE}{BE}$$

$$\Delta ADE\text{的面积}=\frac{3}{5}\times 50=30\ \text{cm}^2$$

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积 $=18+50+30+30=128\ \text{cm}^2$

随堂练习 13

右图中，$DE:EB=CE:EA=5:8$。若四边形 $ABCD$ 的面积为 $169\ \text{cm}^2$，求 ΔAEB 的面积。



最后，我们要用面积证明一个定理。

> ΔABC 中，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D，
> 则 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$。

其证明如下：

如图 5-18 所示，作 DE 与 DF，分别垂直 AB 与 AC 于点 E 及点 F。由 AAS 可得，

$\Delta AED \cong \Delta AFD$

$\therefore \quad DE=DF$

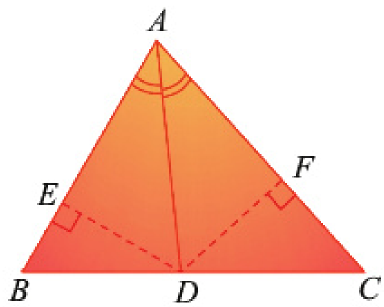


图5-18

一方面，$$\frac{\Delta ABD\text{的面积}}{\Delta ACD\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\times AB\times DE}{\frac{1}{2}\times AC\times DF}=\frac{AB}{AC}$$

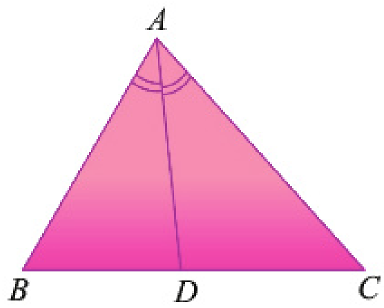
另一方面，以 BD 及 DC 为底，ΔABD 与 ΔACD 是等高三角形，

因此，$\dfrac{\Delta ABD\text{的面积}}{\Delta ACD\text{的面积}}=\dfrac{BD}{CD}$

$\therefore\ \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}$

例题 5

右图的 ΔABC 中，$AB=6\text{ cm}$，$AC=8\text{ cm}$，$BC=9\text{ cm}$，$\angle A$ 的平分线交 BC 于点 D，求 BD 与 CD 的长。



解： $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

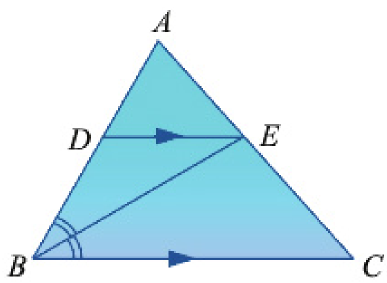
$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{3}{4+3}=\dfrac{3}{7}$

$\therefore\ BD=\dfrac{3}{7}\times 9=\dfrac{27}{7}\text{ cm}$

$\therefore\ CD=9-\dfrac{27}{7}=\dfrac{36}{7}\text{ cm}$

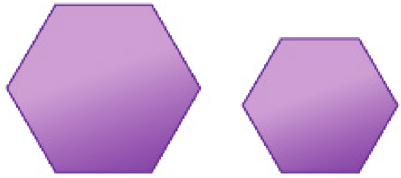
随堂练习 14

右图中，BE 是 $\angle ABC$ 的平分线，$DE//BC$，$AB=6\text{ cm}$，$BC=8\text{ cm}$，求 DE 的长。

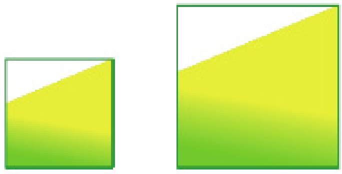


练习 5.3

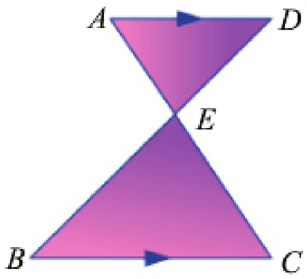
1. 右图所示的两个正六边形，其面积之比是25:16，求其边长之比。



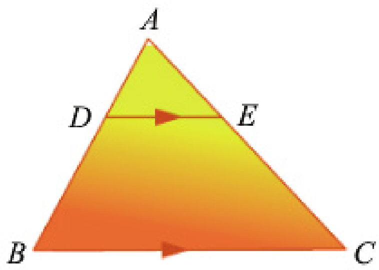
2. 当一个正方形的边长增加了20%，它的面积增加了多少巴仙？



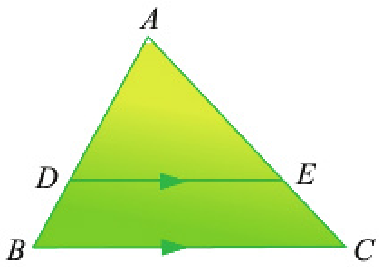
3. 右图中，$AD // BC$，$AE = 4\text{ cm}$，$CE = 6\text{ cm}$，ΔAED 的面积为 24 cm^2，求 ΔBEC 的面积。



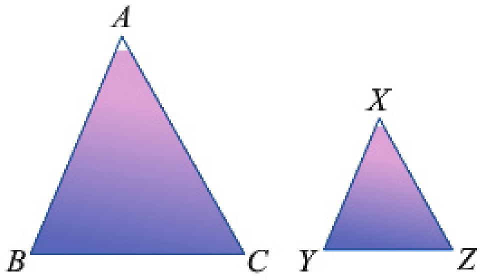
4. 右图中，$DE // BC$，$AD : DB = 1 : 2$，ΔADE 的面积为 7 cm^2，求梯形 $BCED$ 的面积。



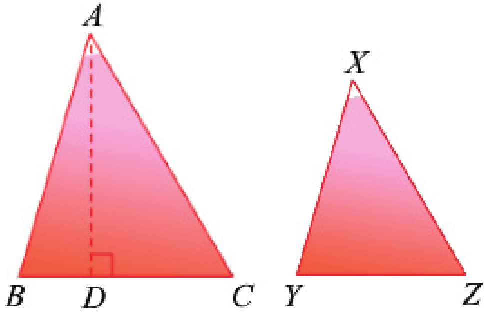
5. 右图中，$DE // BC$，$AD : DB = 2 : 1$，梯形 $BCED$ 的面积为 20 cm^2，求 ΔABC 的面积。



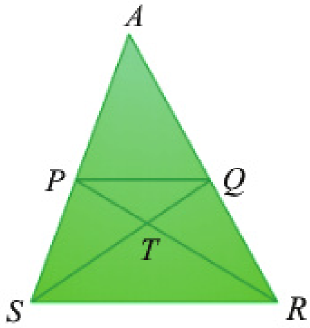
6. 右图中，$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$，$AB = 25$ cm，$XY = 15$ cm。若这两个三角形的面积相差 $32\ \text{cm}^2$，求它们各别的面积。



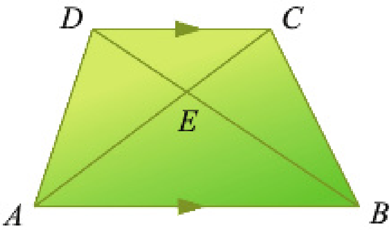
7. 右图中，$\Delta ABC \sim \Delta XYZ$。若 $BC = 5$ cm，$AD = 6$ cm，$YZ = 4$ cm，求 ΔXYZ 的面积。



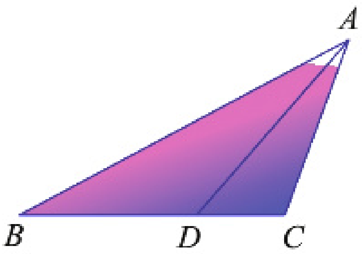
8. 右图中，P 与 Q 分别是 AS 与 AR 的中点。若 ΔASR 的面积为 $60\ \text{cm}^2$，求 ΔAPQ，ΔPQT，ΔSRT，ΔQRT 及 ΔPST 的面积。



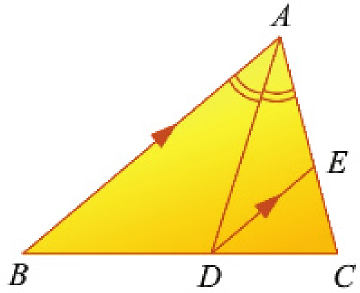
9. 右图中，$AB // DC$，$AB = 8$ cm，$CD = 6$ cm。若 ΔAEB 的面积为 $32\ \text{cm}^2$，求 ΔCDE，ΔADE 及 ΔBCE 的面积。



10. 右图中，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线。若 $AB = 8$ cm，$AC = 4$ cm，$BC = 6$ cm，求 BD 与 CD 的长。

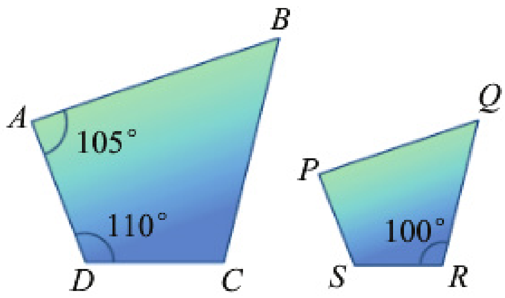


11. 右图中，AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线，$DE // AB$。若 $AB = 15$ cm，$AC = 10$ cm，ΔABC 的面积为 50 cm^2，
(a) 求 DE，AE 及 EC 的长；
(b) 求 ΔCDE 及 ΔADE 的面积。

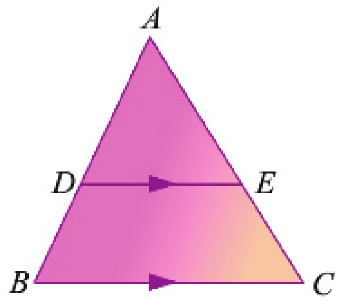


总复习题 5

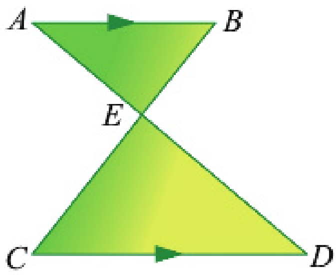
1. 右图中，$ABCD \sim PQRS$，$AB = 10$ cm，$AD = 8$ cm，$PQ = 6$ cm，
(a) 求 $\angle PQR$；
(b) 求 PS 的长。



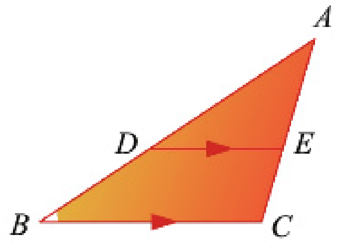
2. 右图中，$DE // BC$，$AD = 6$ cm，$DB = 4$ cm，$BC = 11$ cm，$AC = 15$ cm。求 DE 与 EC 的长。



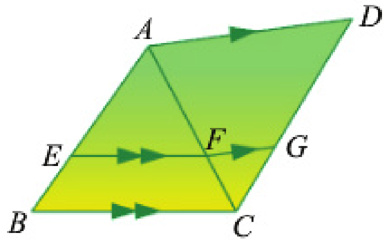
3. 右图中，$AE = 5$ cm，$BE = 4$ cm，$CE = 6$ cm，ΔCDE 的面积为 21 cm^2。
(a) 求 DE 的长；
(b) 求 ΔABE 的面积。



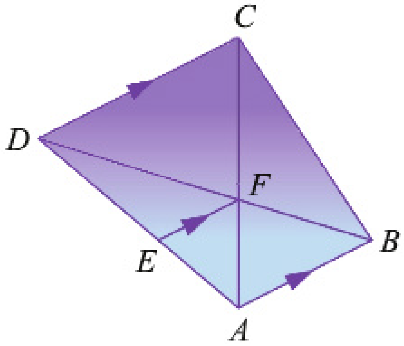
4. 右图中，$DE // BC$，$AE = 6$ cm，$CE = 4$ cm，$BD = 8$ cm，$DE = 7$ cm，
   (a) 证明 $\Delta ADE \sim \Delta ABC$；
   (b) 求 AD 与 BC 的长。



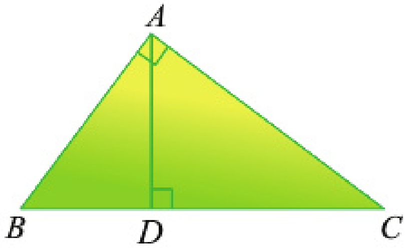
5. 右图中，$EF // BC$，$FG // AD$，$EF = 20$ cm，$BC = 30$ cm，$FG = 8$ cm，$AF = 18$ cm，$CD = 36$ cm，求 AD，FC 与 GC 的长。



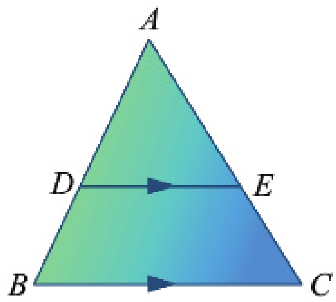
6. 右图中，$AB = 9$ cm，$EF = 6$ cm，$DE = 10$ cm，
   (a) 求 CD 及 AE 之长；
   (b) 若梯形 $ABCD$ 的面积为 $144\ \text{cm}^2$，求梯形 $ABFE$ 的面积。



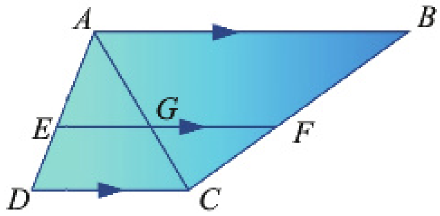
7. 右图中，$AD = 6$ cm，$CD = 8$ cm，
   (a) 证明 $\Delta ADB \sim \Delta CDA \sim \Delta CAB$；
   (b) 求 BD，AB 及 AC 的长。



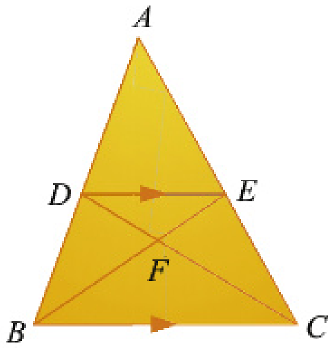
8. 右图中，ΔADE 的面积与梯形 $BCED$ 的面积之比为 $4:5$，求 $AE:EC$。



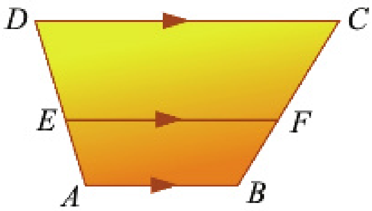
9. 右图中，$EG = 3$ cm，$CD = 5$ cm，$AG = 4$ cm，$AB = 10$ cm，求 CG 及 GF 的长。



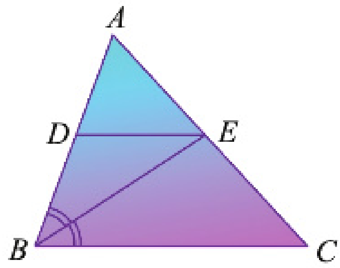
10. 右图中，$DE//BC$，ΔDEF 与 ΔCEF 的面积分别为 16 cm^2 及 28 cm^2，求 ΔABC 的面积。



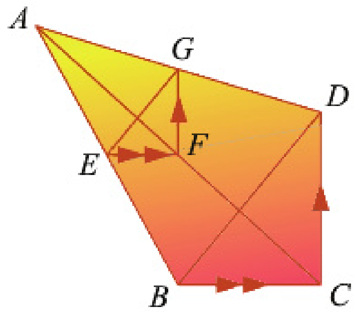
11. 右图中，$AB//EF//DC$，$AB = 15$ cm，$CD = 25$ cm，$EF = 19$ cm，求 $DE : EA$。



12. 右图中，BE 是 $\angle ABC$ 的角平分线，$BD = DE = 5$ cm，$AB = 9$ cm，ΔABC 的面积为 45 cm^2，
    (a) 求 BC 的长；
    (b) 求 ΔBDE 及 ΔBEC 的面积。



13. 右图中，$EF//BC$，$FG//CD$，$AG = 5$ cm，$AD = 10$ cm，$GF = 3$ cm，$BC = 4$ cm，$BD = 7$ cm。
    (a) 证明 $\Delta EFG \sim \Delta BCD$；
    (b) 证明 $\Delta AEG \sim \Delta ABD$；
    (c) 求 CD，EF 及 EG 的长。



6 立体图形、表面积与体积

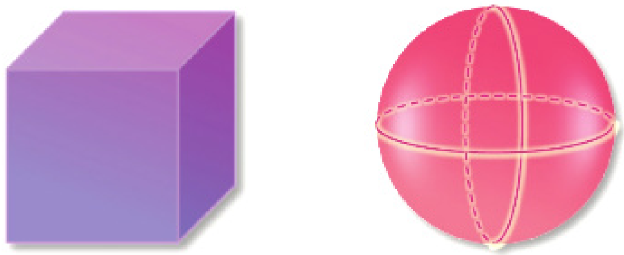
学习目标

- 能计算立方体、长方体、柱体、锥体及球体等立体的表面积与体积
- 能作立体的平面展开图





兔子与老虎，哪一只比较大？很明显的，老虎比较大。也就是说，老虎的体积比较大。



制造一个空心而边长为10 cm的立方体，与制造一个空心而直径为10 cm的球体，何者所用的材料较多？这便牵涉到这两个立体中，哪一个有较大的表面积。

在这一章，我们将学习一些常见立体图形的性质及它们的表面积与体积的求法。

6.1 基本概念

在这一节，我们讨论立体几何中的一些基本概念。我们知道，在一个平面中，两点确定一条直线；两条直线若不平行，便会相交。在空间中，两点依然唯一确定一条直线，但却有无数个平面经过已知的两点，如图 6-1 所示。

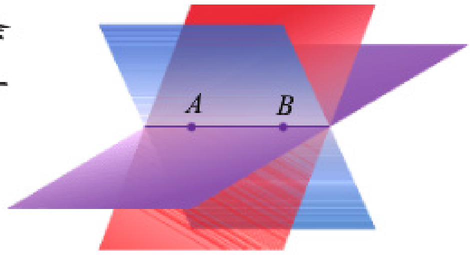


图 6-1

经过空间中不共线的三点可画出一个三角形，这也确定了一个平面，如图 6-2 所示。

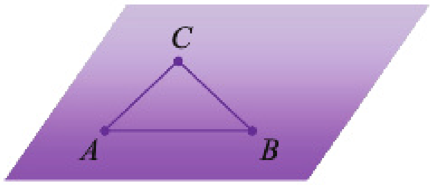
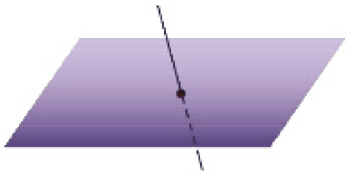


图 6-2

> 不在同一直线上的三点确定一个平面。

直线与平面的位置关系

		
直线在平面上	直线与平面相交于一点	直线与平面没有交点，即直线与平面平行

如图 6-3 所示，直线 l 与平面 π 相交于点 A，且与平面 π 中的任意直线都互相垂直，我们说直线 l 垂直于平面 π。

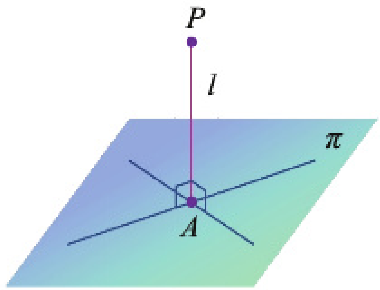


图 6-3

经过一平面 π 外一点 P，只有一条直线垂直于平面 π，我们称此直线为由点 P 到平面 π 的垂线。垂线与平面的交点 A 称为垂足。线段 PA 称为垂线段。

由于直角三角形中，直角边比斜边短，由图 6-4 可以看出，由平面 π 外一点 P 与平面所连接的各线段中，垂线段最短。我们称垂线段的长为点 P 到平面 π 的距离。

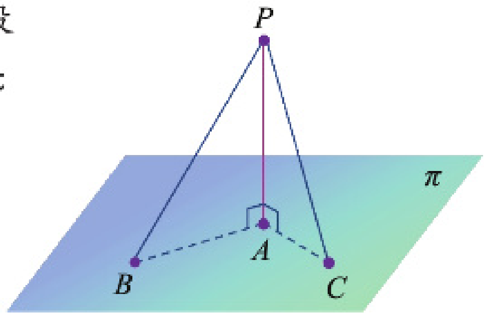
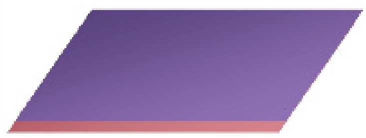
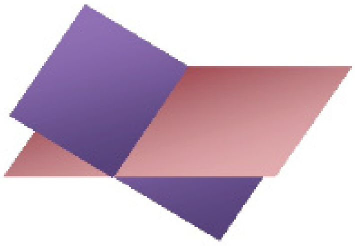


图 6-4

> 平面外一点到平面上各点所连接的线段中，垂线段最短，垂线段的长就是该点到平面的距离。

平面与平面的位置关系

		
两平面重合	两平面相交于一直线	两平面平行但不重合

若两平面平行，则垂直于一平面的直线，必与另一平面垂直，这样的直线称为两平面的公垂线。夹在两平行平面之间的公垂线段都等长，我们称这长度为两平行平面的距离。如图 6-5 所示为两个平行平面π_1及π_2，P及Q两点分别在π_1及π_2上，线段PQ分别垂直于π_1及π_2。因此，线段PQ的长即为两平面的距离。它也是点P到平面π_2的距离。

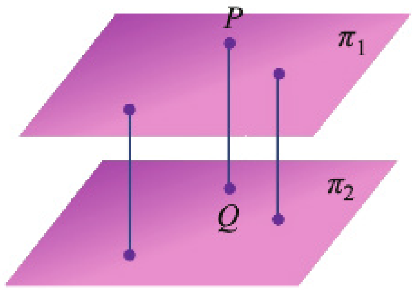


图 6-5

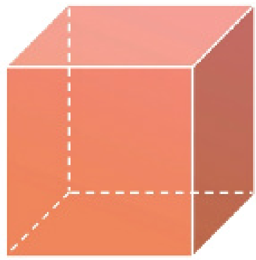
6.2 表面积、体积及其单位的换算

表面积

在初中二，我们已学过一些平面图形面积的计算。一个立体的表面积就是它的外表面的面积。

例题 1

右图所示是一立方体，其边长为 4 cm。求此立方体的表面积。



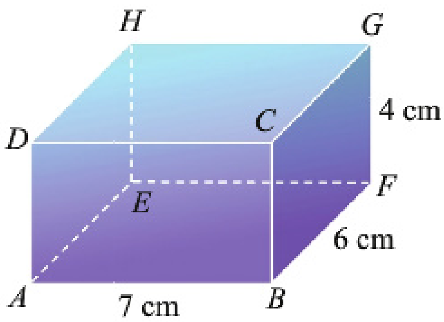
解： 立方体的表面是由六个正方形所组成，每一个正方形的边长是 4 cm，因此面积是 $4^2 = 16\ \text{cm}^2$。

$\therefore$ 立方体的表面积 $= 6 \times 16 = 96\ \text{cm}^2$

立方体的表面积 $= 6 \times (\text{边长})^2$

例题 2

右图所示是一长方体，其中 $AB = 7$ cm，$GF = 4$ cm，$BF = 6$ cm。求此长方体的表面积。



解： 长方体的表面是由六个长方形所组成。

$ABCD$ 的面积 $= EFGH$ 的面积 $= 7 \times 4$

$= 28\ \text{cm}^2$

$BCGF$ 的面积 $= ADHE$ 的面积 $= 6 \times 4$

$= 24\ \text{cm}^2$

$ABFE$ 的面积 $= DCGH$ 的面积 $= 7 \times 6$

$= 42\ \text{cm}^2$

$\therefore$ 长方体的表面积 $= 2(28 + 24 + 42)$

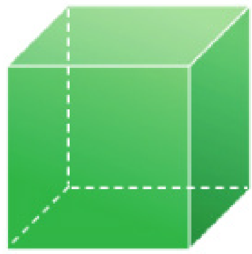
$= 188\ \text{cm}^2$

长方体的表面积 = 2×(长×宽+长×高+宽×高)

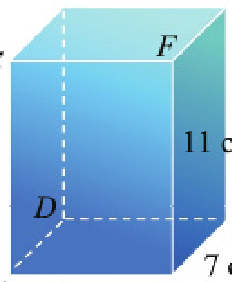
表面积与面积有相同的单位，因此它的单位换算法则与面积的一样，在这里我们就不再加以说明。

随堂练习 1

1. 右图所示是一立方体，其边长为 7 cm。求此立方体的表面积。



2. 右图所示是一长方体，其中 $AB = BC = 7$ cm，$BF = 11$ cm。求此长方体的表面积。



体积

一个立体所占空间的大小，叫做这个立体的体积。我们要如何测量体积呢？

若一个立方体的边长是一个单位，我们就定义它的体积为一个立方单位。如图 6-6 所示的立方体，它的边长是 1 cm，因此它的体积是 1 cm^3。同理，如果一个立方体的边长是 1 m，它的体积就是 1 m^3。

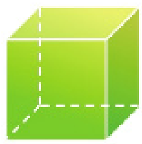


图 6-6

例题 3

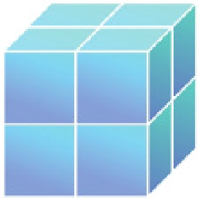
求边长为

(a) 2 cm (b) 3 cm

的立方体的体积。

解： (a) 边长为2 cm的立方体是由8个边长为1 cm的立方体所组成，所以其体积为$8\times1=8\text{ cm}^3$。

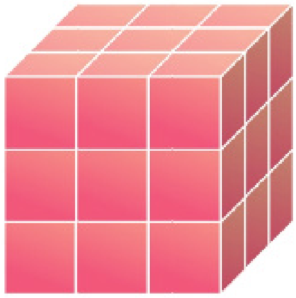
我们注意到，$8\text{ cm}^3=2\text{ cm}\times2\text{ cm}\times2\text{ cm}$。



2 cm

(b) 边长为3 cm的立方体是由27个边长为1 cm的立方体所组成，所以其体积为$27\times1=27\text{ cm}^3$。

我们注意到，$27\text{ cm}^3=3\text{ cm}\times3\text{ cm}\times3\text{ cm}$。



3 cm

立方体的体积＝$(\text{边长})^3$

例题 4

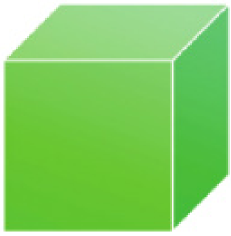
一立方体的体积是64 cm^3，求它的边长。

解： 设立方体的边长为x cm。

则立方体的体积 $x^3=64$

$x=4$

∴ 它的边长为4 cm。



x

随堂练习 2

右图所示的箱子是一边长为 1.5 m 的立方体，求它的体积。



例题 5

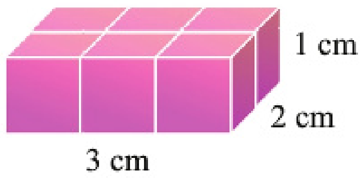
求下列各长方体的体积：

(a) 长 = 3 cm， 宽 = 2 cm， 高 = 1 cm

(b) 长 = 4 cm， 宽 = 3 cm， 高 = 2 cm

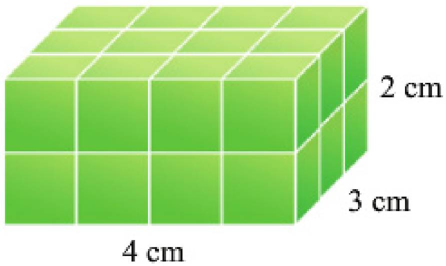
解： (a) 长 = 3 cm， 宽 = 2 cm， 高 = 1 cm 的长方体是由 6 个边长为 1 cm 的立方体所组成，所以其体积为 $6\times1=6\ \text{cm}^3$。

我们注意到， $6\ \text{cm}^3=3\ \text{cm}\times2\ \text{cm}\times1\ \text{cm}$。



(b) 长 = 4 cm， 宽 = 3 cm， 高 = 2 cm 的长方体是由 24 个边长为 1 cm 的立方体所组成，所以其体积为 $24\times1=24\ \text{cm}^3$。

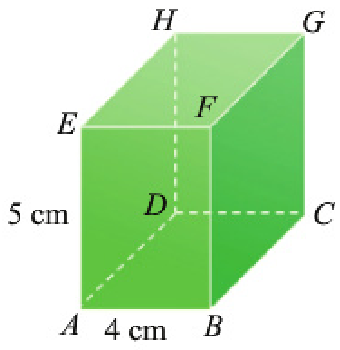
我们注意到， $24\ \text{cm}^3=4\ \text{cm}\times3\ \text{cm}\times2\ \text{cm}$。



长方体的体积 = 长 × 宽 × 高

随堂练习 3

右图所示的长方体中，其底面 $ABCD$ 是一边长为 4 cm 的正方形，它的高等于 5 cm。求此长方体的体积。



体积单位的换算

由 1 cm = 10 mm 可得

$$\begin{aligned}1\ \text{cm}^3 &= 1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm} \times 1\ \text{cm}\\ &= 10\ \text{mm} \times 10\ \text{mm} \times 10\ \text{mm}\\ &= 1000\ \text{mm}^3\end{aligned}$$

同理，由 1 m = 100 cm 可得

$$\begin{aligned}1\ \text{m}^3 &= 1\ \text{m} \times 1\ \text{m} \times 1\ \text{m}\\ &= 100\ \text{cm} \times 100\ \text{cm} \times 100\ \text{cm}\\ &= 10^6\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

在初中一，我们学过 $1\ \text{m}^3 = 1000\ \ell$

因此，$1000\ \ell = 10^6\ \text{cm}^3$

$1\ \ell = 1000\ \text{cm}^3$

又，$1\ \ell = 1000\ \text{m}\ell$

因此，$1\ \text{m}\ell = 1\ \text{cm}^3$

$$1\ \text{cm}^3 = 10^3\ \text{mm}^3$$
$$1\ \text{m}^3 = 10^6\ \text{cm}^3$$
$$1\ \ell = 10^3\ \text{cm}^3$$
$$1\ \text{m}\ell = 1\ \text{cm}^3$$

例题 6

换算下列的单位：

(a) $7.8\ \text{cm}^3 =$ _______ mm^3

(b) $0.089\ \text{m}^3 =$ _______ cm^3

(c) $27000\ \text{cm}^3 =$ _______ m^3

(d) $5600\ \text{mm}^3 =$ _______ cm^3

(e) $64000\ \text{mm}^3 =$ _______ ℓ

解： (a) $7.8\ \text{cm}^3 = 7.8 \times 10^3\ \text{mm}^3$
$$= 7800\ \text{mm}^3$$

(b) $0.089\ \text{m}^3 = 0.089 \times 10^6\ \text{cm}^3$
$$= 89000\ \text{cm}^3$$

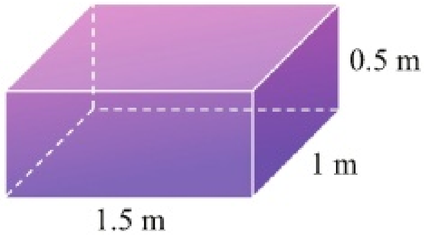
(c) $27000\ \text{cm}^3 = \dfrac{27000}{10^6}\ \text{m}^3$
$$= 0.027\ \text{m}^3$$

(d) $5600\ \text{mm}^3 = \dfrac{5600}{1000}\ \text{cm}^3$
$$= 5.6\ \text{cm}^3$$

(e) $64000\ \text{mm}^3 = \dfrac{64000}{1000}\ \text{cm}^3$
$$= 64\ \text{m}\ell$$
$$= 0.064\ \ell$$

例题 7

右图所示的水箱，它的长为 1.5 m，宽为 1 m，高为 0.5 m。这水箱能装多少公升的水？



解： 水箱的容量 $= 1.5\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0.5\text{ m}$

$= 0.75\text{ m}^3$

$= 0.75 \times 1000\ \ell$

$= 750\ \ell$

∴ 水箱能装 750 ℓ 的水。

例题 8

已知一长方体的体积是 0.3 m^3。若此长方体的宽是 50 cm，高是 40 cm，求它的长。

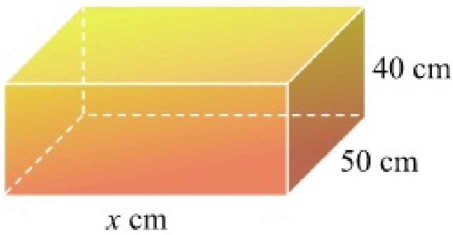
解： 设长方体的长为 x cm，则

$$x\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 40\text{ cm} = 0.3\text{ m}^3$$

$$2000x\text{ cm}^3 = 0.3 \times 10^6\text{ cm}^3$$

$$x = \frac{300000}{2000}$$

$$= 150$$

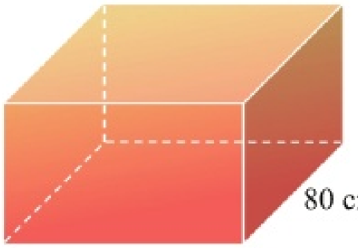


∴ 长方体的长为 150 cm。

随堂练习 4

1. 换算下列各单位：
   (a) $0.0778\ cm^3$ = ________ mm^3
   (b) $2.78\ m^3$ = ________ cm^3
   (c) $48000\ cm^3$ = ________ m^3
   (d) $890\ mm^3$ = ________ cm^3

2. 右图所示的水箱能装 240 公升的水。它的长为 1 m，宽为 80 cm，求它的高。



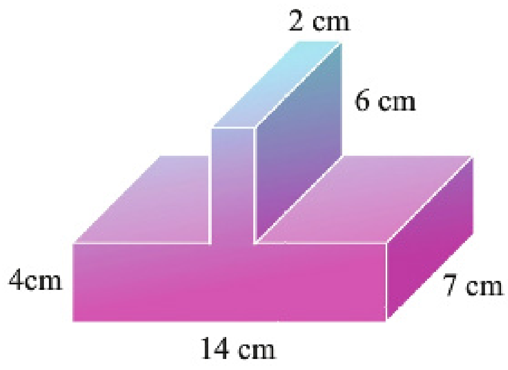
练习 6.2

1. 一个立方体的边长是 8 cm，求它的表面积与体积。
2. 一个立方体的表面积是 $150\ cm^2$，求它的边长与体积。
3. 一个立方体的体积是 $216\ cm^3$，求它的表面积。
4. 用 64 块每边长 1 cm 的立方体叠成一个较大的立方体，求所叠成立方体的边长。
5. 一本书长 15 cm，宽 10 cm，厚 2 cm，求它的体积。
6. 下表所示为一长方体的部分资料。完成下表：

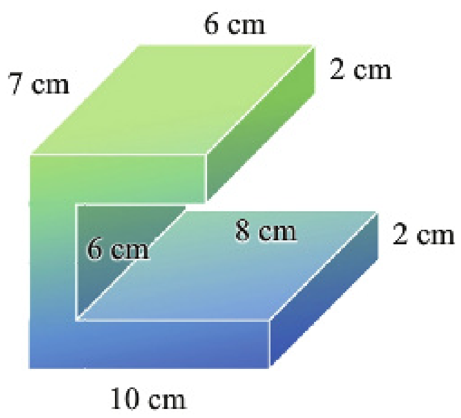
	长	宽	高	体积	表面积
(a)	3 mm	2 mm	5 mm		
(b)	7 cm	7 cm		$294\ cm^3$	
(c)		8 cm	5 cm	$24\ cm^3$	
(d)	9 mm		4 mm		$202\ mm^2$

7. 一个长方体的表面积是94 cm^2，长是5 cm，宽是3 cm，求它的高。
8. 一本书的体积是144 cm^3，它的长是24 cm，宽是12 cm，求它的厚度。
9. 一长4 cm，宽5 cm，高6 cm的长方体铁块，熔化了后，制成另一长8 cm，宽3 cm的长方体铁块，问它的高是多少？
10. 下列的立体都是由长方体组合而成，求它们的体积与表面积：

(a)



(b)



11. 换算下列各单位：

(a) 2.38 cm^3 = ________ mm^3　　(b) 0.0098 m^3 = ________ cm^3

(c) 672 mm^3 = ________ cm^3　　(d) 2340 cm^3 = ________ m^3

(e) 24 ℓ = ________ m^3　　(f) 5.2 ℓ = ________ cm^3

(g) 780 mℓ = ________ cm^3　　(h) 890 cm^3 = ________ ℓ

(i) 0.78 m^3 = ________ ℓ

12. 一个长20 cm，宽20 cm，高50 cm的长方体水箱，可装多少公升的水？
13. 一长方体鱼缸长1 m，宽25 cm，高20 cm。此鱼缸可装多少公升的水？
14. 一长方体水池可容140 m^3的水。
   (a) 若它的高是4 m，宽是5 m，求它的长。
   (b) 若此水池装水至3 m的高度，问水池里装了多少公升的水？
15. 一空水箱的底是一边长150 cm的正方形，其高为80 cm。有一水管每分钟注20公升的水入此水箱内，问
   (a) 需多少分钟，水高才达到16 cm？
   (b) 装满半个水箱需多少分钟？

6.3 平面展开图

我们要怎样用卡纸制作一个立方体呢？

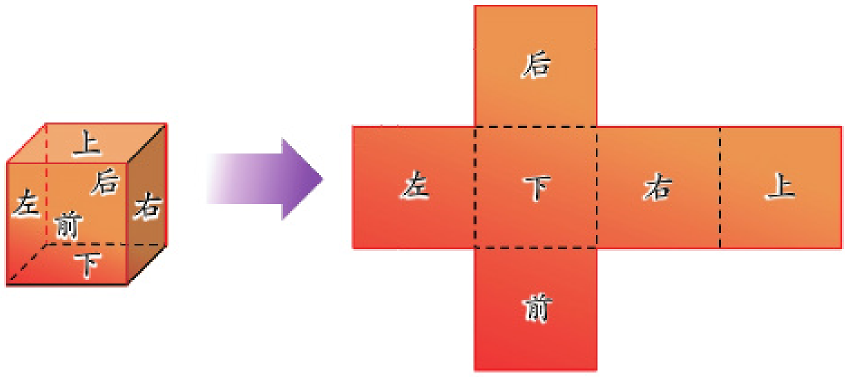


图6-7

如图 6-7 所示，若将左边的立方体沿着红线剪开，就可开展成右边的平面图形。相反的，将右边的平面图形沿黑色虚线折，就可得到左边的立方体。我们称右边的平面图形为左边立方体的平面展开图。

由一个立体的平面展开图可以很容易的算出该立体的表面积。

一个立体的平面展开图不是唯一的，胥视我们如何将立体剪开。图 6-8 所示是立方体的另一平面展开图。

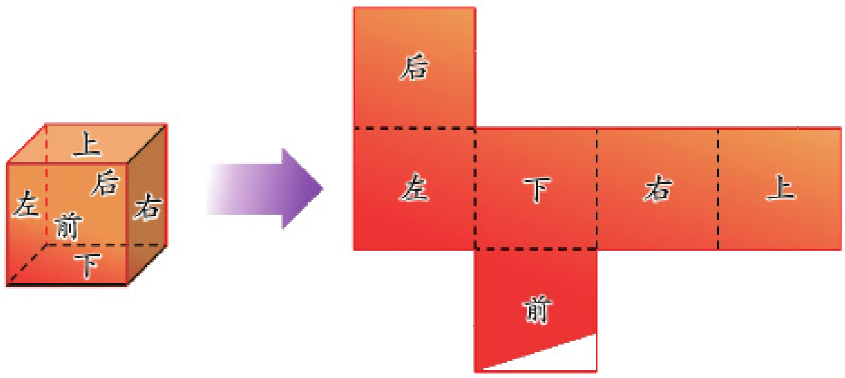


图 6-8

例题 1

右图所示为一立方体的平面展开图。

当折成立方体时，

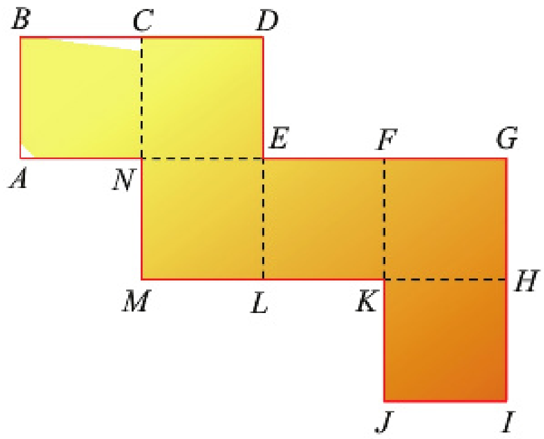
(a) 下列各边与哪一个边重合？

(i) AN (ii) GH (iii) IJ

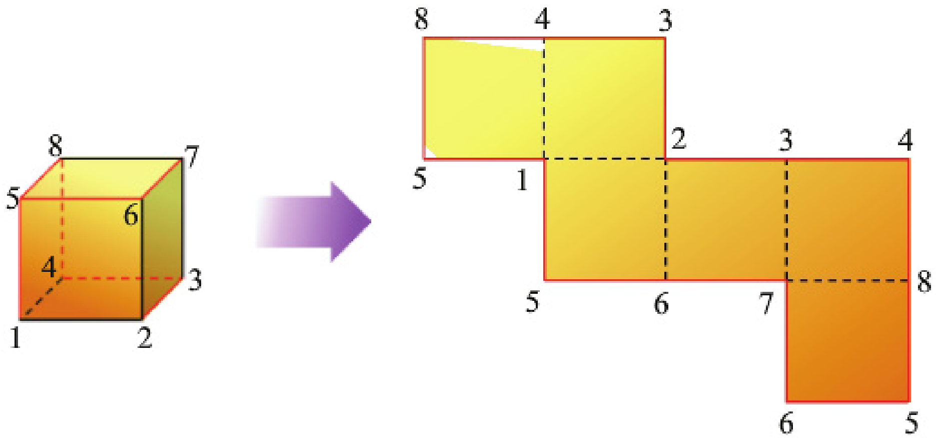
(b) 下列各点与哪些点重合？

(i) L (ii) D (iii) A

(c) 平面 $EFKL$ 与哪一个面相对？



解：



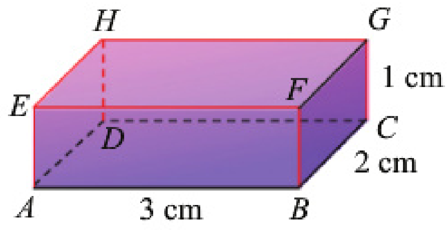
(a) (i) MN (ii) BC (iii) ML

(b) (i) J (ii) F (iii) M, I

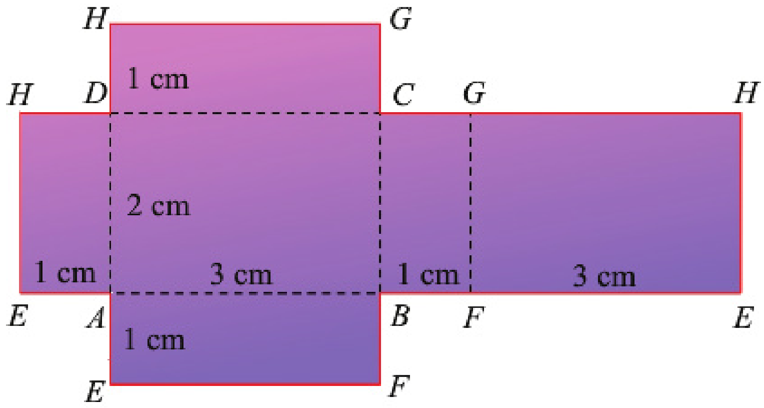
(c) 平面 $ABCN$

例题 2

右图所示为一长、宽、高各为 3 cm，2 cm 及 1 cm 的长方体。作此长方体沿红线剪开所得的平面展开图。



解：



随堂练习 5

右图所示是一长方体的平面展开图，

(a) 作出此立体，并求其表面积与体积。

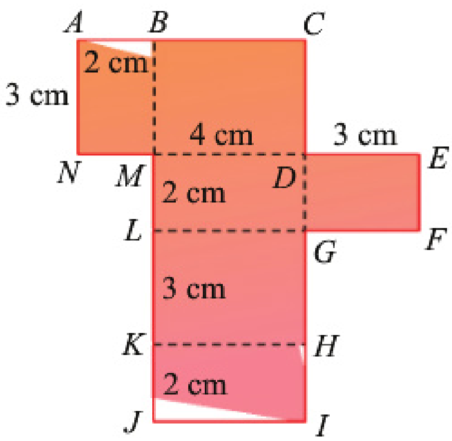
(b) 下列各边与哪一个边重合？

(i) LM (ii) LK (iii) EF

(c) 下列各点与哪些点重合？

(i) K (ii) E (iii) A

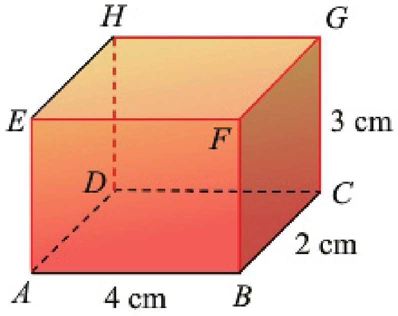
(d) 平面 $DEFG$ 与哪一个面相对？



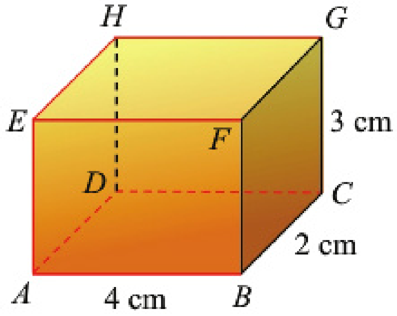
练习 6.3

1. 作下列各长方体沿红线剪开所得的平面展开图：

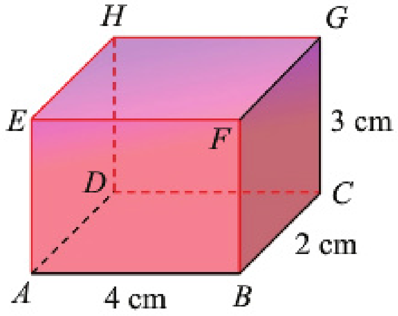
(a)



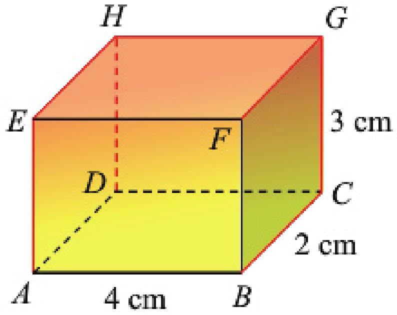
(b)



(c)

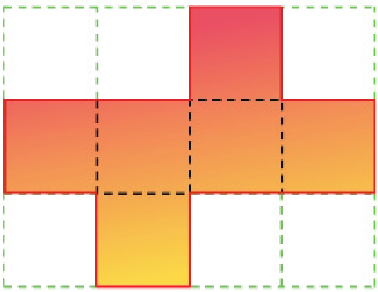


(d)

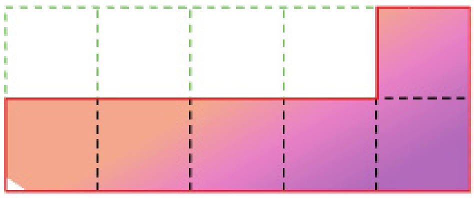


2. 下列各图是否为一立方体的平面展开图?

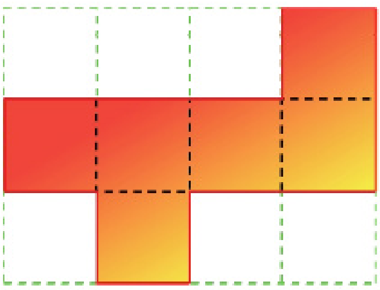
(a)



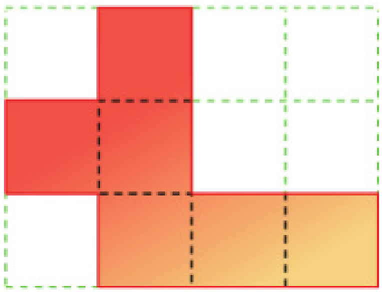
(b)



(c)

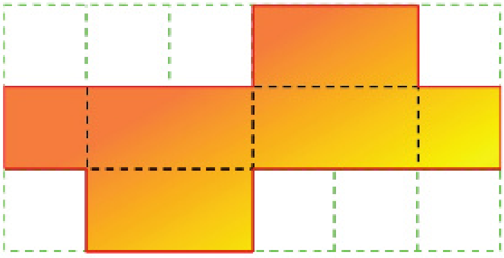


(d)

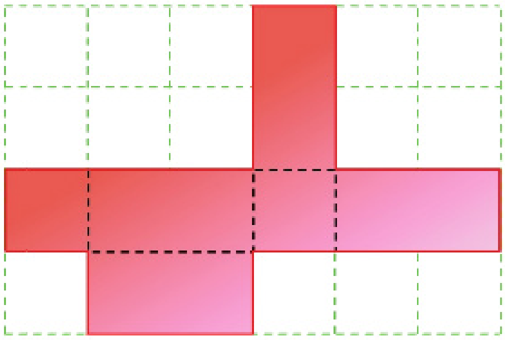


3. 下列各图是否为一长方体的平面展开图？

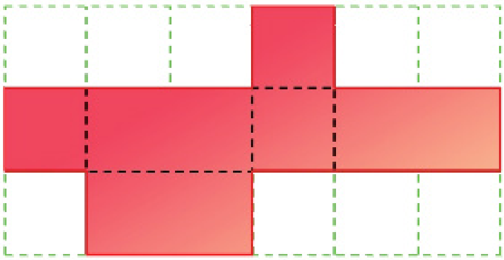
(a)



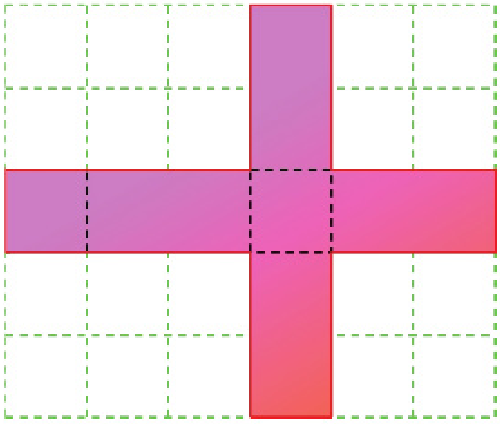
(b)



(c)



(d)



4. 右图所示是一立方体的平面展开图，

(a) 作出此立体，并求其表面积与体积。

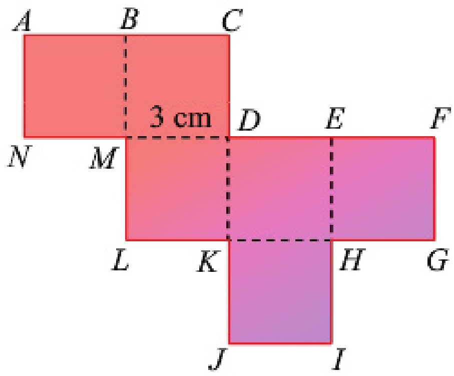
(b) 下列各边与哪一个边重合？

(i) LM　(ii) AN　(iii) GF

(c) 下列各点与哪些点重合？

(i) L　(ii) C　(iii) A

(d) 平面$LMDK$与哪一个面相对？



5. 右图所示是一长方体的平面展开图，

(a) 作出此立体，并求其表面积与体积。

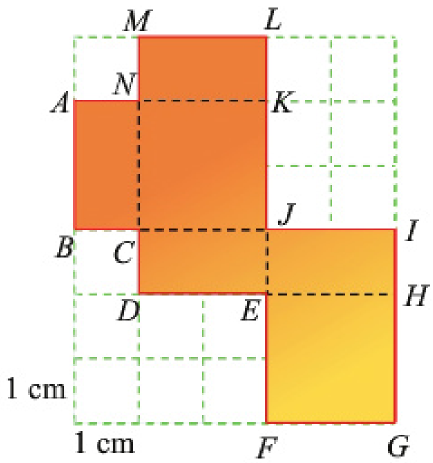
(b) 下列各边与哪一个边重合？

(i) DE　(ii) LK　(iii) EF

(c) 下列各点与哪些点重合？

(i) D　(ii) K　(iii) A

(d) 平面$EHIJ$与哪一个面相对？



6.4 棱柱

若一个多面体的其中两个面互相平行，其余的各面顺次相交而得的边也互相平行，这种多面体称为棱柱体。平行的两个面称为底面，它们是全等的多边形，而其余的各面称为侧面。两个侧面的公共边称为侧棱，两个底面之间的距离称为高。若一棱柱有 n 个侧面，我们称它为 n 棱柱，如图 6-9 所示是一四棱柱。

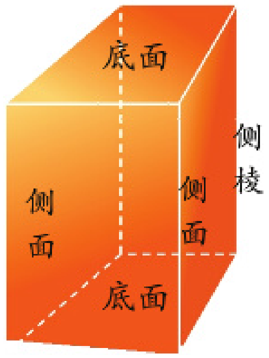


图 6-9

任一平行于棱柱的两个底面的截面，都与这两个底面全等。如图 6-10 所示为一些不同形状截面的棱柱。

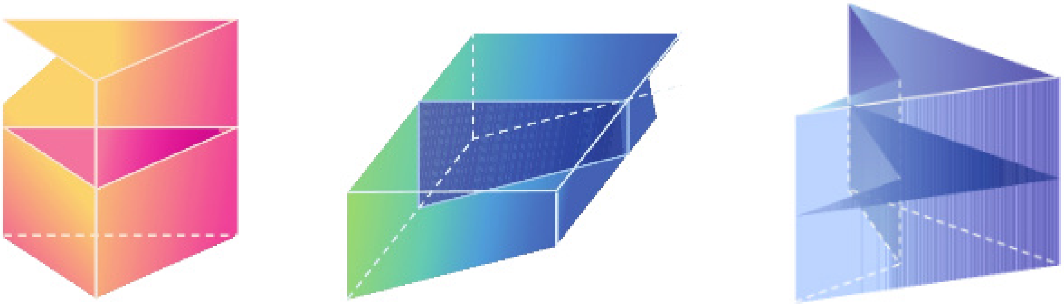
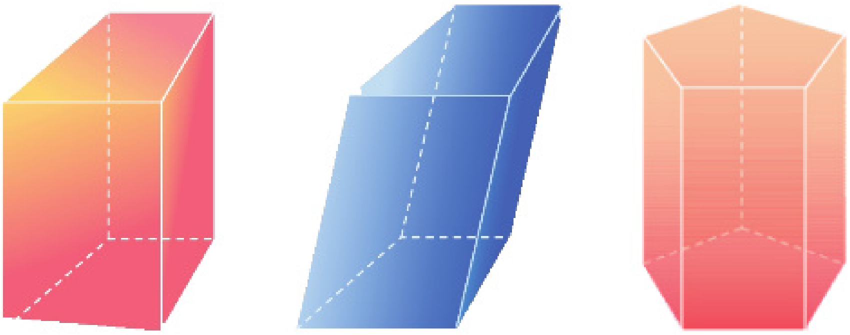


图 6-10

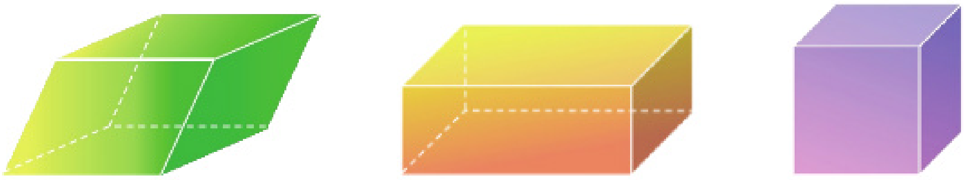
如图 6-11 所示，若棱柱的侧棱与底面垂直，我们称它为直棱柱，否则称它为斜棱柱。若直棱柱的底面是正多边形，我们称它为正棱柱。



(a) 直四棱柱　(b) 斜四棱柱　(c) 正五棱柱

图 6-11

两个底面为平行四边形的棱柱称为平行六面体，长方体与立方体是平行六面体的特例，如图 6-12 所示。



(a) 平行六面体　　(b) 长方体　　(c) 立方体

图 6-12

直棱柱的体积

在6.2节，我们已经学过，一个长，宽，高各为 l，w，h 的长方体，其体积为

$$体积=长\times宽\times高=lwh$$

但我们注意到，lw 为其底面的面积，因此，长方体的体积为底面积×高。

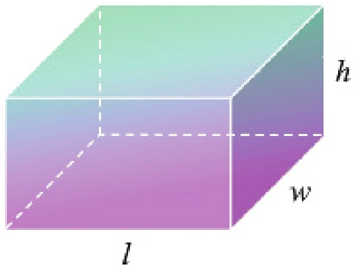


图 6-13

若一直棱柱的底面是一直角三角形，如图 6-14 所示，则

$$\begin{aligned}体积&=\frac{1}{2}\times长方体的体积\\&=\frac{1}{2}\times长\times宽\times高\\&=\left(\frac{1}{2}\times长\times宽\right)\times高\\&=底面积\times高\end{aligned}$$

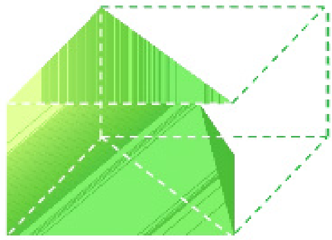


图 6-14

如图6-15所示的直棱柱，其底面ABC是一三角形，BD是AC边上的高。此直棱柱是由两个底面为直角三角形的直棱柱拼合而成，因此，

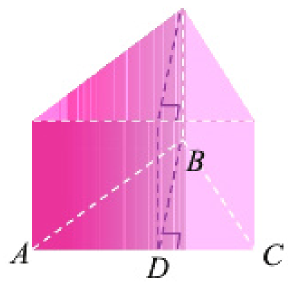
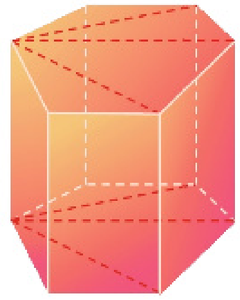


图 6-15

$$\begin{aligned}体积&=\Delta ABD的面积\times高+\Delta BCD的面积\times高\\&=(\Delta ABD的面积+\Delta BCD的面积)\times高\\&=\Delta ABC的面积\times高\\&=底面积\times高\end{aligned}$$

如图 6-16 所示的直棱柱，其底面是一个六边形，它被三条对角线分成四个三角形。用以上的方法可以推导出

$$体积=底面积\times高$$

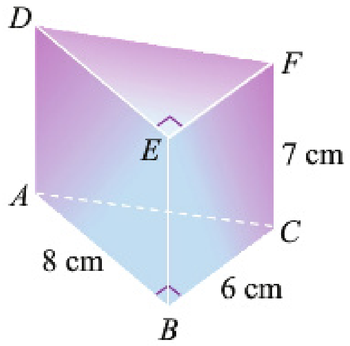

图 6-16

由此可得，

直棱柱的体积＝底面积×高

例题 1

右图所示的直棱柱，其底面是直角三角形。求它的体积。



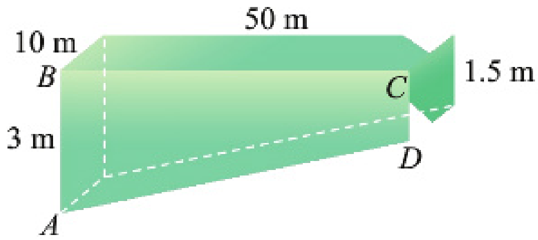
解： 底面 ΔABC 的面积$=\dfrac{1}{2}\times6\times8=24\text{ cm}^2$

$\therefore$ 直棱柱的体积$=24\times7$

$=168\text{ cm}^3$

例题 2

右图所示是一游泳池，它的外形是一直棱柱。若要将此泳池灌满，需要多少公升的水？



解： 直棱柱的底面 $ABCD$ 是一梯形，

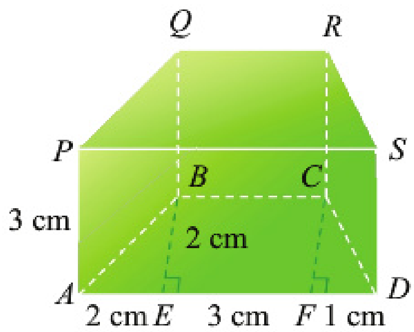
$$\text{底面积} = \frac{1}{2}(3+1.5)\times 50$$
$$= 112.5\ \text{m}^2$$

$$\text{泳池的容量} = 112.5\times 10$$
$$= 1125\ \text{m}^3$$
$$= 1125000\ell$$

∴ 需要1125000公升的水。

随堂练习 6

右图所示的直棱柱，其底面是一梯形，$AD // BC$。E，F 是 B，C 两点到 AD 的垂足。若 $AE = 2$ cm，$EF = 3$ cm，$FD = 1$ cm，$BE = 2$ cm，$AP = 3$ cm。求棱柱的体积。



直棱柱的表面积

一个直 n 棱柱的平面展开图是由两个底面与 n 个长方形所组成。如图 6-17 所示为一个直五棱柱的平面展开图。

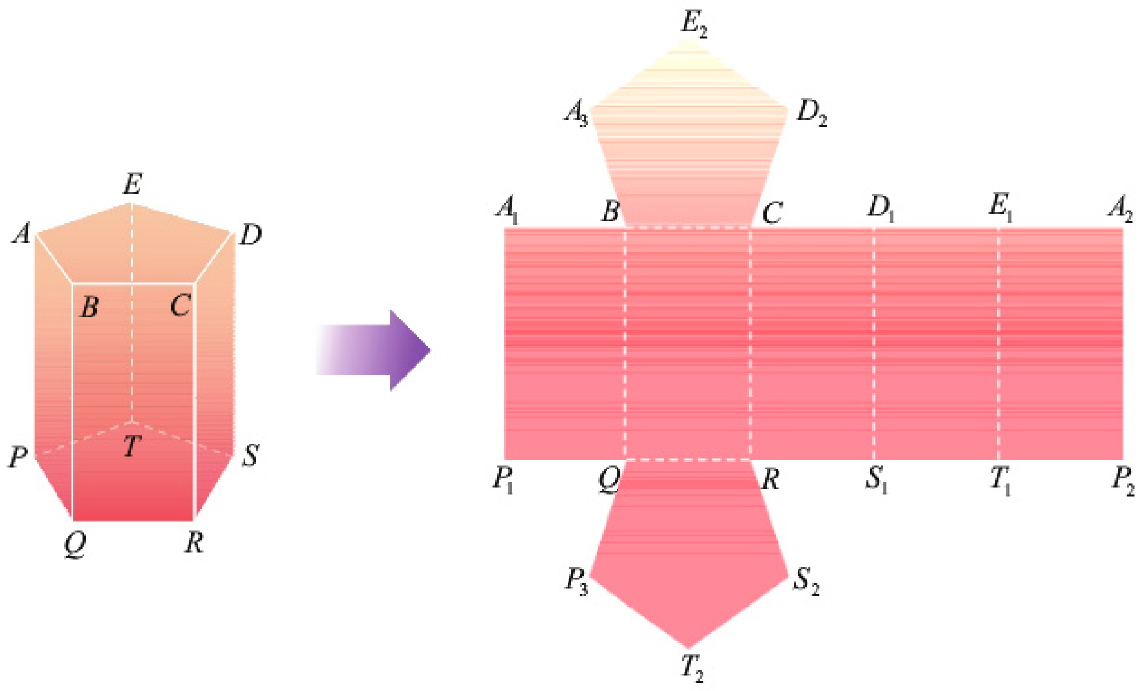


图 6-17

由图 6-17 可以看出，长方形 $A_1P_1P_2A_2$ 的长 A_1A_2 等于五边形 $ABCDE$ 的周长，它的宽 A_1P_1 等于直棱柱的高。因此，图 6-17 所示的直棱柱的表面积等于

底面 $ABCDE$ 的面积 + 底面 $PQRST$ 的面积 + 长方形 $A_1P_1P_2A_2$ 的面积

$= 2 \times$ 底面$ABCDE$的面积 + 底面$ABCDE$的周长 × 高

对于任何的直棱柱，我们有

直棱柱的表面积 = 2 × 底面面积 + 底面的周长 × 高

例如，对于一边长为 a 的立方体，

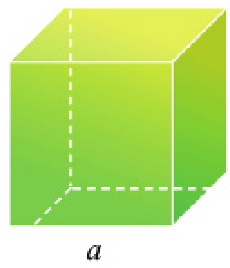


图 6-18

$$
\begin{aligned}
\text{表面积} &= 2\times a^2 + 4a\times a \\
&= 6a^2 \\
&= 6\times(\text{边长})^2
\end{aligned}
$$

对于一长，宽，高各为 l，w，h 的长方体，

$$
\begin{aligned}
\text{表面积} &= 2\times l\times w+(2l+2w)\times h \\
&= 2(lw+lh+wh) \\
&= 2\times(\text{长}\times\text{宽}+\text{长}\times\text{高}+\text{宽}\times\text{高})
\end{aligned}
$$

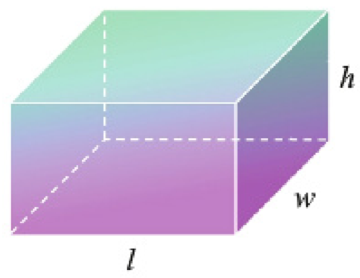
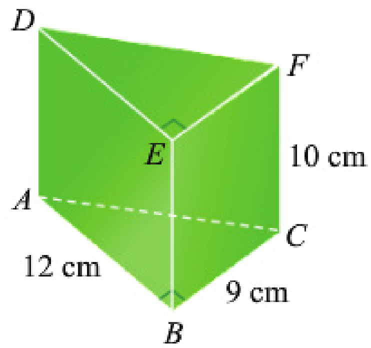


图 6-19

例题 3

右图所示的直棱柱，其底面是直角三角形。求它的表面积。



解： 底面 ΔABC 的面积 $=\frac{1}{2}\times 9\times 12=54\text{ cm}^2$

$AC=\sqrt{9^2+12^2}=15\text{ cm}$

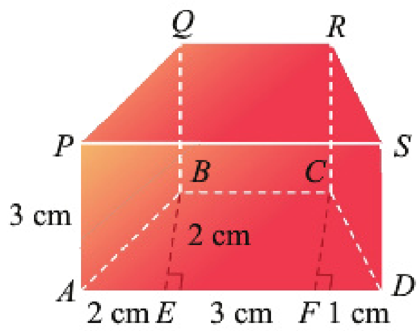
底面 ΔABC 的周长 $=9+12+15=36\text{ cm}$

$\therefore$ 直棱柱的表面积 $=2\times 54+36\times 10$

$=468\text{ cm}^2$

随堂练习 7

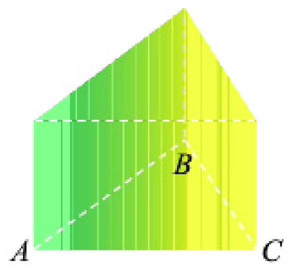
右图所示的直棱柱，其底面是一梯形，$AD//BC$。E，F 是 B，C 两点到 AD 的垂足。若 $AE=2$ cm，$EF=3$ cm，$FD=1$ cm，$BE=2$ cm，$AP=3$ cm。求棱柱的表面积，答案以根式表示。



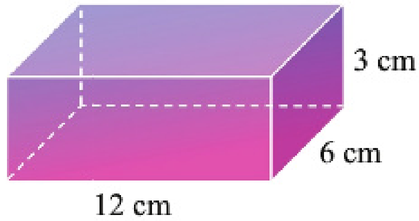
练习 6.4

1. 若一直棱柱的底面积是 20 cm²，高是 6 cm，求其体积。

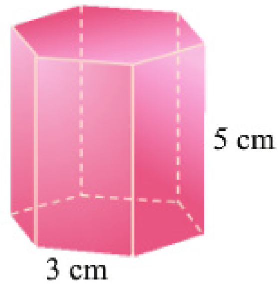
2. 右图所示为一三角直棱柱。已知它的体积为 161 cm³，高为 7 cm，求其底面 ΔABC 的面积。



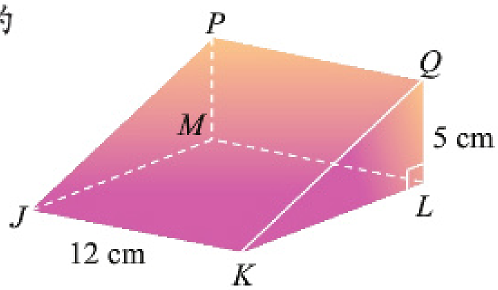
3. 右图所示是一长方体无盖的盒子。求其容积。



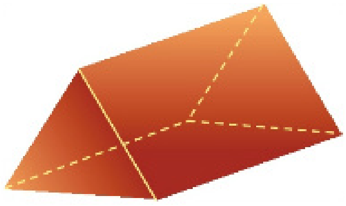
4. 右图所示的正棱柱，其底边是一边长为 3 cm 的正六边形，它的高等于 5 cm，求它的表面积。



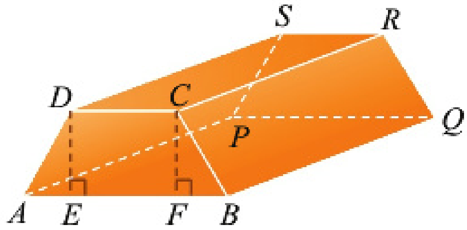
5. 右图的直棱柱中，$JKLM$ 是正方形。求此直棱柱的体积与表面积。



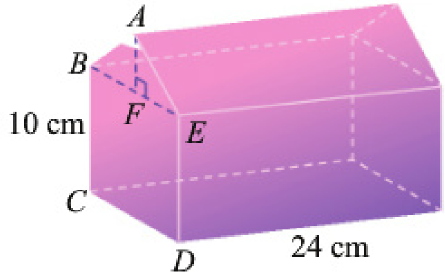
6. 右图所示的巧克力呈直棱柱状，其底面是一边长为4 cm 的正三角形，长等于 15 cm，
(a) 求此巧克力的体积；
(b) 若巧克力是用铝箔纸包装，求包装的表面积。



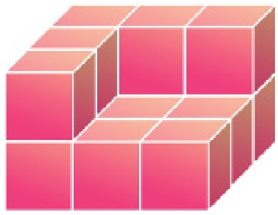
7. 右图所示是一直棱柱，其底面 $ABCD$ 是一梯形，$AE=3$ cm，$EF=5$ cm，$BF=1$ cm，$DE=4$ cm，$AP=15$ cm。求此棱柱的体积与表面积。



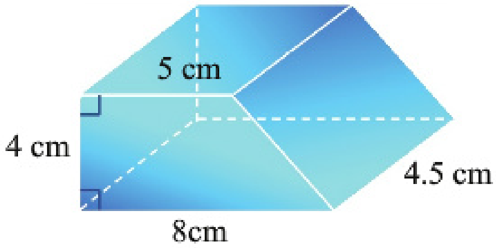
8. 右图所示是一直棱柱，ΔABE 是等腰三角形，$BCDE$ 是长方形。$BE=8$ cm，$AF=3$ cm。求此棱柱的体积与表面积。



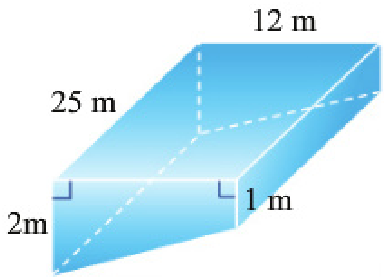
9. 右图所示的立体是由若干个边长为 2 cm 的立方体所叠成。求此立体的体积与表面积。



10. 求右图所示直棱柱的体积与表面积。



11. 右图所示的水池呈直棱柱状。要将此水池注满，需多少公升的水？



6.5 直圆柱

直圆柱

如图 6-20 所示，一长方形 $XYAB$ 绕着它的边 XY 旋转一周所得的立体称为直圆柱，简称圆柱。XY 称为圆柱的轴。由 AB 旋转而得的曲面称为圆柱的侧面。圆柱的上下底面是由 YA 与 XB 旋转而得，它们是两个全等且平行的圆形，两个底面之间的距离称为圆柱的高。

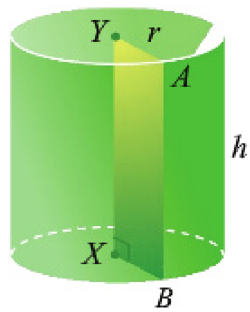


图 6-20

直圆柱的体积

设 r 是圆柱的底圆半径，h 是高。与直棱柱一样，

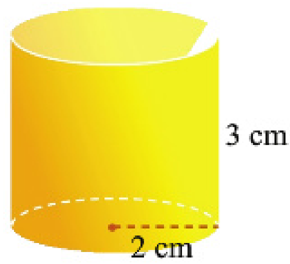
直圆柱的体积 $=$ 底面积 $\times$ 高

$= \pi r^2 h$

直圆柱的体积 $= \pi r^2 h$

例题 1

求右图所示直圆柱的体积，答案以 π 表示。



解： 直圆柱的体积 $= \pi \times 2^2 \times 3$

$= 12\pi \text{ cm}^3$

例题 2

已知一直圆柱的体积为$112\pi\ \text{cm}^3$，高为7 cm，求其底圆半径。

解： 设底圆半径为r，则

$$112\pi=\pi r^2\times 7$$
$$r^2=16$$
$$r=4\ \text{cm}$$

例题 3

右图所示为一铁管，管厚1 cm，长3 m，管的内直径为20 cm。求铁管的体积（取$\pi=\frac{22}{7}$）。



解： 内半径 $r=\frac{20}{2}=10\ \text{cm}$

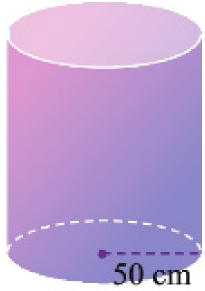
外半径 $R=10+1=11\ \text{cm}$

高 $h=300\ \text{cm}$

$$\therefore\quad 铁管的体积=\pi R^2h-\pi r^2h$$
$$=\frac{22}{7}\times300\times\left(11^2-10^2\right)$$
$$=\frac{22}{7}\times300\times21$$
$$=19800\ \text{cm}^3$$

随堂练习 8

右图所示的圆柱形水桶的容量是825 ℓ。已知其底圆半径是 50 cm，求它的高 (取$\pi=\frac{22}{7}$)。



直圆柱的表面积

图 6-21 所示为直圆柱的平面展开图，它是由两个圆形及一个长方形所组成。

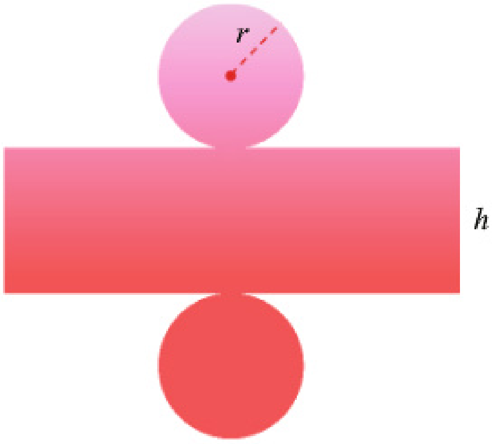


图 6-21

长方形的长等于底圆的周长$2\pi r$，而宽等于圆柱的高 h。因此，

直圆柱的侧面面积$=2\pi rh$

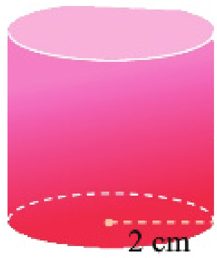
直圆柱的表面积$=2\times$底圆面积$+$侧面面积

$=2\pi r^2+2\pi rh$

直圆柱的表面积$=2\pi r^2+2\pi rh$

例题 4

求右图所示直圆柱的表面积，答案以π表示。

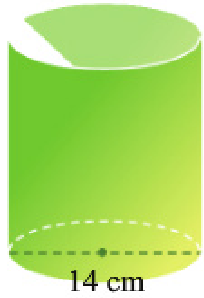


解： 直圆柱的表面积 $= 2\times\pi\times 2^2 + 2\times\pi\times 2\times 3$

$= 20\pi\ \text{cm}^2$

例题 5

一个没有盖的圆柱形铁桶，高 15cm，底面的直径是 14 cm，做这个桶需用多少平方公分的铁片(取 $\pi = \frac{22}{7}$)？



解： 桶的底圆面积 $= \pi\times 7^2$

$= \frac{22}{7}\times 7^2$

$= 154\ \text{cm}^2$

桶的侧面面积 $= 2\times\pi\times 7\times 15$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 7\times 15$

$= 660\ \text{cm}^2$

$\therefore$ 需用铁片 $154 + 660 = 814\ \text{cm}^2$

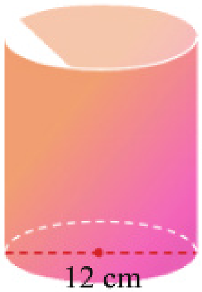
随堂练习 9

若一个圆柱体的高是6 cm，体积是96π cm³，求它的表面积。

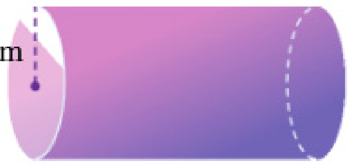
练习 6.5

1. 求下列各直圆柱的体积与表面积 (取$\pi=\frac{22}{7}$)：

(a)



(b)



2. 一直圆柱的底圆直径是14 cm，体积为1386 cm³，求它的高 (取$\pi=\frac{22}{7}$)。

3. 一直圆柱高7 cm，体积为352 cm³，求它的底圆半径 (取$\pi=\frac{22}{7}$)。

4. 完成下表，若有必要，答案以π表示：

	底圆半径	高	直圆柱的体积	直圆柱的表面积
(a)	7 cm	7 cm		
(b)	10 cm		700π cm³	
(c)		8 m	288π m³	
(d)	7 cm			140π cm²
(e)		5 cm		72π cm²

5. 一直圆柱底圆的周长是 88 cm，高是 34 cm，求其体积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

6. 一圆柱形烧杯的底圆直径为 6 cm，若装有 7 cm 高的水，求所装的水的体积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

7. 用价值 RM 10 的 50 仙硬币叠成一圆柱体状，若一枚 50 仙硬币的直径是 28 mm，厚 2 mm，求所叠成的圆柱体的体积与表面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

8. 右图所示的钢管，其内直径是 8 cm，外直径是 11 cm，长 120 cm，求它的体积，答案以 π 表示。



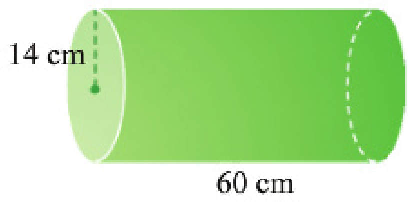
9. 一个圆柱形水桶的体积是 4800 cm^3，底圆面积是 150 cm^2。若装了 $\frac{3}{4}$ 桶水，求水面的高度。

10. 一个没有盖的圆柱形铁桶，高 45 cm，底圆直径是 28 cm。做这个铁桶需用多少平方公分的铁片 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)？

11. 一直圆柱的侧面面积是 440 cm^2，底圆半径是 5 cm，求它的高与体积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。

12. 一直圆柱的底圆面积是 314 cm^2，高为 20 cm，求其表面积 (取 $\pi=3.14$)。

13. 如右图所示，一圆柱形滚筒的半径是 14 cm，长 60 cm。求此滚筒滚动了 10 圈后所经过的面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。



6.6 棱锥

若一个多面体的一个面是多边形，其余各面为有一个公共顶点的三角形，这个多面体称为棱锥或角锥。如图 6-22 所示是一个棱锥，多边形 $ABCD$ 称为底面，其余各面称为侧面，侧面的公共点 V 称为顶点。VA，VB，VC，VD 称为侧棱。由顶点 V 至底面 $ABCD$ 的距离称为高。

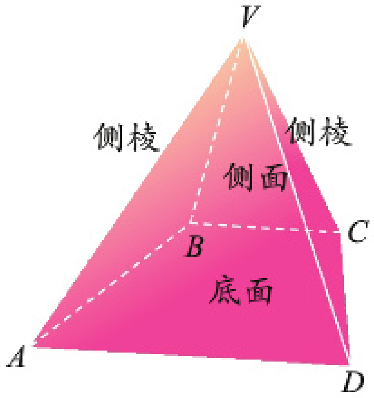
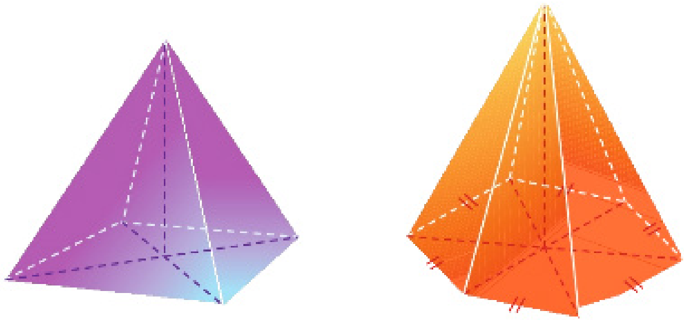


图 6-22

若由顶点到底面的垂足是底面的中心，这种棱锥称为直棱锥。若直棱锥的底面是正多边形，这种棱锥称为正棱锥。



(a) 直棱锥 (b) 正棱锥

图 6-23

直棱锥的体积

$$\text{直棱锥的体积}=\frac{1}{3}\times\text{底面积}\times\text{高}$$

一直棱锥的体积等于有相同底面及高的棱柱的 $\frac{1}{3}$，这可以用以下的实验来验证：取一个无盖直棱锥容器及一个拥有相同底面及高的无盖直棱柱容器，在直棱锥

容器中装满水，然后倒入直棱柱容器中。我们会发现，重复三次刚好将直棱柱容器装满。

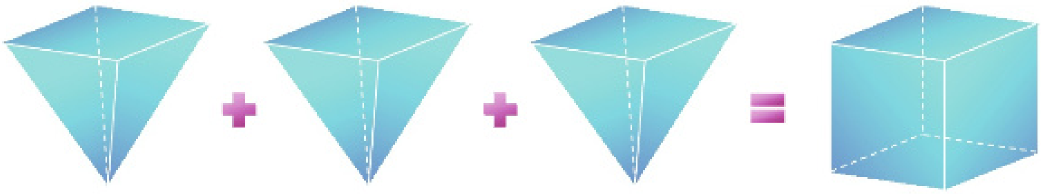
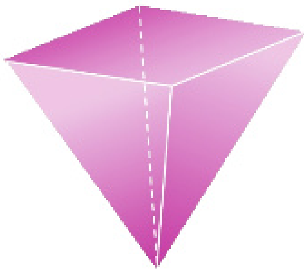


图 6-24

例题 1

右图所示为一正棱锥容器，其底面是一边长为 10 cm 的正方形，高等于 12 cm，此容器能装多少公升的水？



解： 容器的体积 $= \frac{1}{3} \times 10 \times 10 \times 12$

$= 400 \text{ cm}^3$

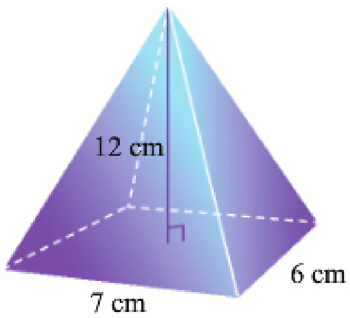
$= 0.4\ \ell$

∴ 能装 0.4 公升的水。

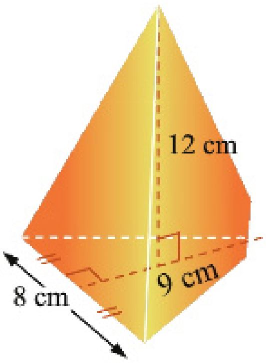
例题 2

求下列各直棱锥的体积：

(a)



(b)



解： (a) $底面积 = 7 \times 6$
$= 42\ cm^2$

$棱锥的体积 = \frac{1}{3} \times 42 \times 12$
$= 168\ cm^3$

(b) $底面积 = \frac{1}{2} \times 8 \times 9$
$= 36\ cm^2$

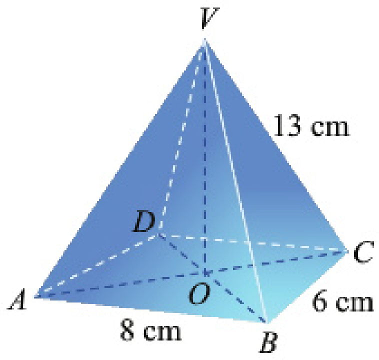
$棱锥的体积 = \frac{1}{3} \times 36 \times 12$
$= 144\ cm^3$

例题 3

右图所示为一直棱锥，其底面 $ABCD$ 是一长 8 cm，宽 6 cm 的长方形，各侧棱长 13 cm，O 是 AC 与 BD 的交点。求

(a) OC 及 VO 的长；

(b) 棱锥的体积。



解： (a) $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10\ cm$

$OC = \frac{1}{2} AC = 5\ cm$

$VC^2 = VO^2 + OC^2$

$VO = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ cm$

(b) $棱锥的体积 = \frac{1}{3} \times 8 \times 6 \times 12$
$= 192\ cm^3$

随堂练习 10

1. 已知一正棱锥的底面是一边长为 12 cm 的正方形，体积等于 432 cm^3，求此棱锥的高。
2. 已知一正棱锥的底面是一边长为 12 cm 的正三角形，高等于 10 cm，求此棱锥的体积。

直棱锥的表面积

直棱锥的表面积 = 底面面积 + 各侧面三角形面积之和

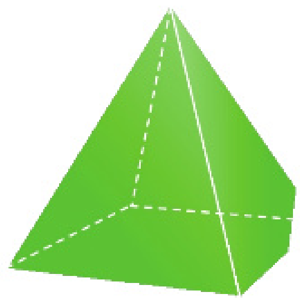
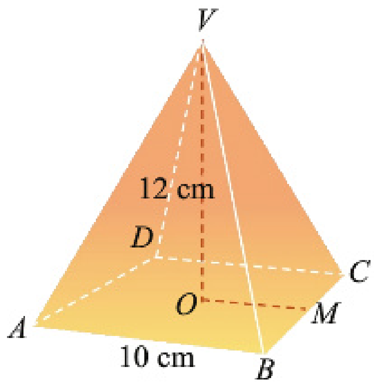


图 6-25

例题 4

一鲜牛奶是以正棱锥包装出售，其底面是边长 10 cm 的正方形，高为 12 cm。求此包装的表面积。



解： $OM = \frac{10}{2} = 5\text{ cm}$

$VM = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\text{ cm}$

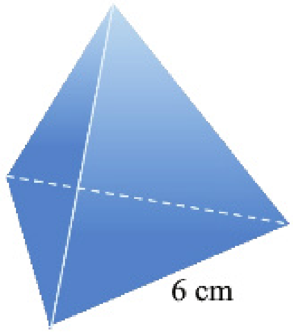
包装的表面积 = $ABCD$ 的面积 + $4 \times \Delta VBC$ 的面积

$= 10 \times 10 + 4 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 13$

$= 360\text{ cm}^2$

随堂练习 11

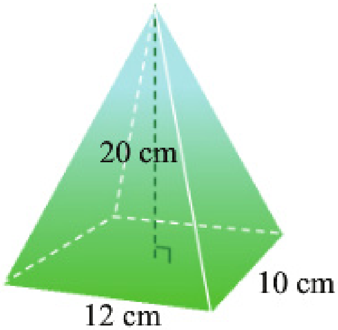
右图所示是一正四面体，它的每个面都是边长等于 6 cm 的正三角形，求它的表面积。



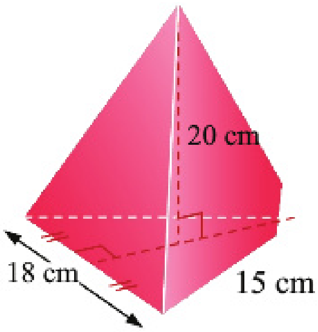
练习 6.6

1. 求下列各直棱锥的体积：

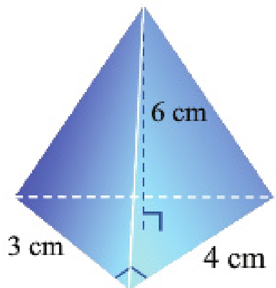
(a)



(b)

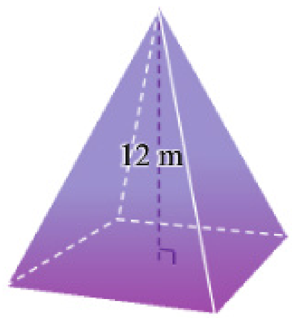


2. 若一直棱锥的底面面积为15 cm^2，高为 6 cm，求它的体积。
3. 右图所示是一直棱锥，它的高等于 6 cm，底面是一直角三角形。求此棱锥的体积。

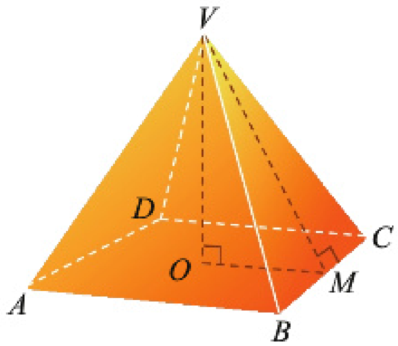


4. 已知一正棱锥的底面是一边长为 6 cm 的正方形，若此棱锥的体积是 48 cm^3，求它的高及表面积。
5. 已知一直棱锥的底面是一长 24 cm，宽 16 cm 的长方形。将此棱锥放入一装满水的水桶中，它排开 2.56 ℓ 的水。求此棱锥的高。

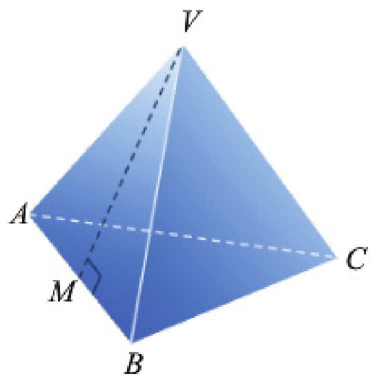
6. 右图所示为一金字塔形建筑物，其底面是一正方形。若此建筑物的体积是400 m^3，高 12 m，
   (a) 求底面的边长；
   (b) 此建筑物的侧面面积。



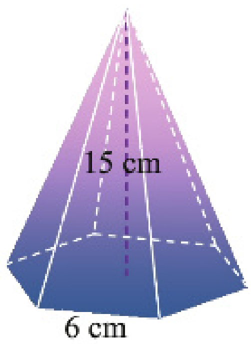
7. 右图所示是一直棱锥，其底面是一长方形。M 是 BC 的中点，$AB = 12$ cm，$BC = 8$ cm，$VM = 10$ cm。求此棱锥的体积与表面积。



8. 右图所示是一正棱锥，其底面是边长为 12 cm 的等边三角形，M 是 AB 的中点，$VM = 8$ cm。求此棱锥的表面积。



9. 右图所示是一正棱锥，它的底面是一边长为 6 cm 的正六边形，高等于 15 cm。求此棱锥的体积。



6.7 直圆锥

如图 6-26 所示，直角三角形 XYA 绕着它的直角边 XY 旋转一周所得的立体称为直圆锥，简称圆锥。XY 称为圆锥的轴。直圆锥的底面是一个圆形，它是由直角边 XA 旋转而得。顶点 Y 到底面的距离称为高。由 YA 旋转而得的曲面称为圆锥的侧面。YA 为圆锥的斜高。

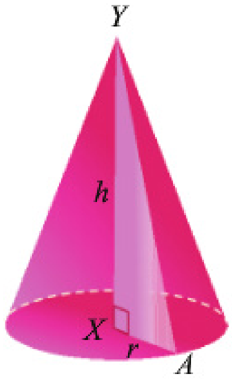


图 6-26

直圆锥的体积

$$\text{直圆锥的体积} = \frac{1}{3} \times \text{底面积} \times \text{高} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

一直圆锥的体积等于有相同底面及高的圆柱的 $\frac{1}{3}$，这可以用以下的实验来验证：

取一个无盖直圆锥容器及一个拥有相同底面及高的无盖直圆柱容器，在直圆锥容器中装满水，然后倒入直圆柱容器中。我们会发现，重复三次刚好将直圆柱容器装满。

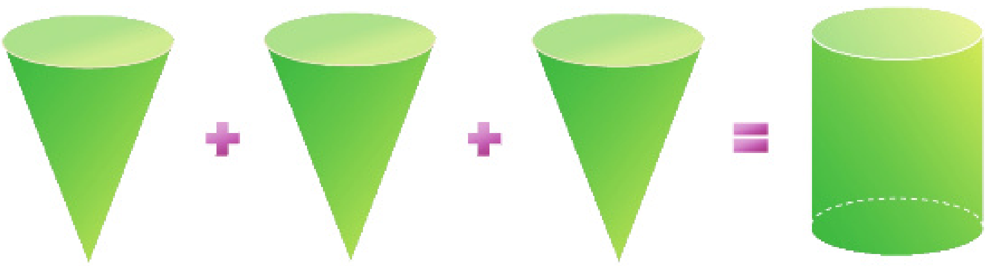
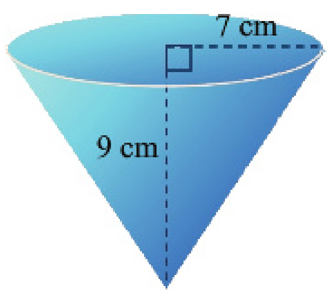


图 6-27

例题 1

右图所示的直圆锥容器能装多少毫升的水(取$\pi=\frac{22}{7}$)?



解： 容器的体积$=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times7^2\times9$

$=462\text{ cm}^3$

∴ 能装462毫升的水。

例题 2

已知一直圆锥的体积是314 cm^3，若其高为12 cm，求其底圆的半径(取$\pi=3.14$)。

解： 设底圆半径为r，则

$$314=\frac{1}{3}\times3.14\times r^2\times12$$

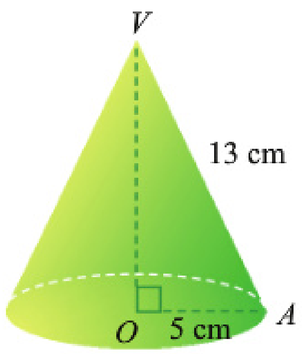
$$r^2=25$$

$$r=5$$

∴ 底圆的半径为5 cm。

例题 3

右图所示是一直圆锥，求它的体积，答案以π表示。



解： $VO=\sqrt{13^2-5^2}=12\text{ cm}$

体积$=\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12$

$=100\pi\text{ cm}^3$

随堂练习 12

右图所示的冰淇淋筒，其容量是132 mℓ。若它的高是14 cm，求它的底圆半径 (取$\pi = \dfrac{22}{7}$)。



直圆锥的表面积

图 6-28 所示为一直圆锥的平面展开图，其中侧面展开后是一扇形 *VAB*。

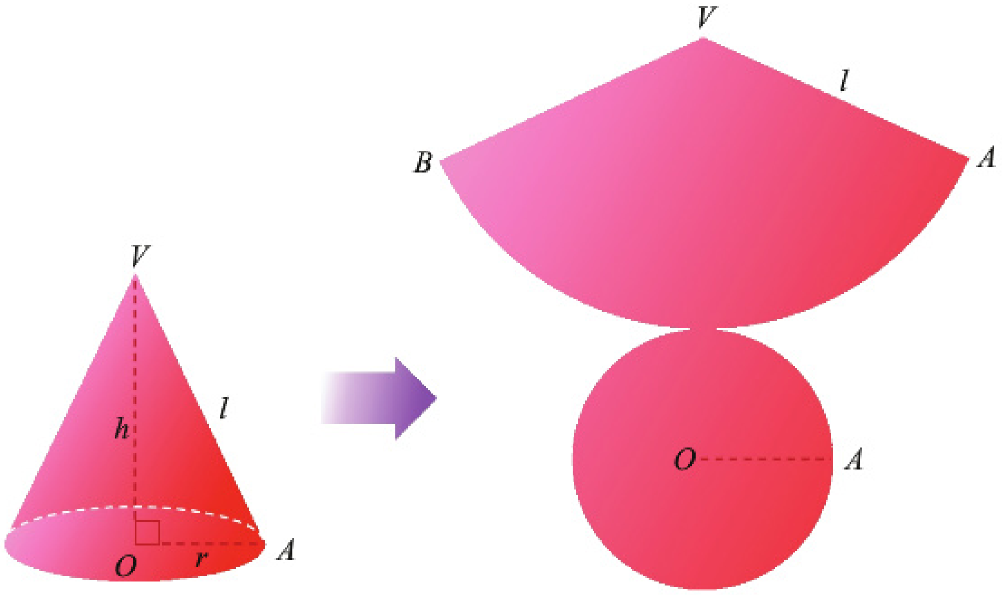


图 6-28

扇形 VAB 的半径 $l=\sqrt{r^2+h^2}$，

弧 AB 的长等于底圆的周长，即 $AB=2\pi r$

因此，若扇形的圆心角为 θ，

$$\frac{\text{扇形}VAB\text{的面积}}{\pi l^2}=\frac{\theta}{360°}=\frac{AB}{2\pi l}$$

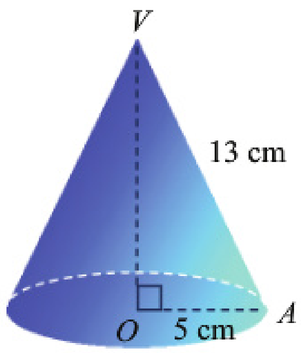
$$\begin{aligned}\text{扇形}VAB\text{的面积}&=\frac{2\pi r}{2\pi l}\times\pi l^2\\&=\pi rl\end{aligned}$$

由此可得，$\begin{aligned}\text{直圆锥的表面积}&=\text{底圆面积}+\text{侧面面积}\\&=\pi r^2+\pi rl\end{aligned}$

直圆锥的表面积 $=\pi r^2+\pi rl$

例题 4

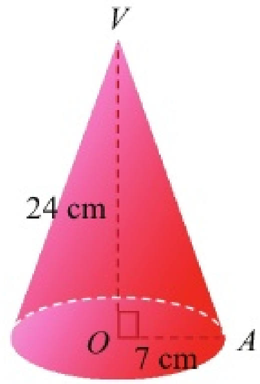
右图所示是一直圆锥，求它的表面积，答案以 π 表示。



解： $\begin{aligned}\text{表面积}&=\pi\times5^2+\pi\times5\times13\\&=90\pi\ \text{cm}^2\end{aligned}$

例题 5

右图所示是一直圆锥，求它的表面积（取 $\pi=\dfrac{22}{7}$）。

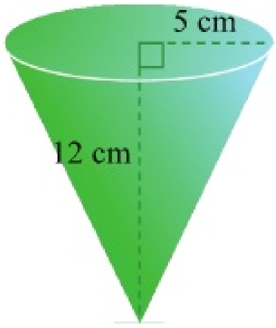


解： $VA=\sqrt{24^2+7^2}=25$

$$\text{表面积}=\frac{22}{7}\times7^2+\frac{22}{7}\times7\times25$$
$$=704\text{ cm}^2$$

随堂练习 13

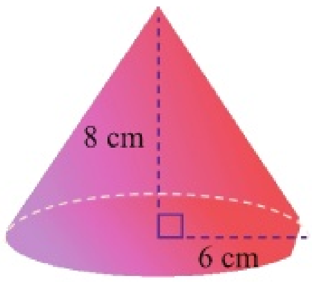
小芬要用一彩纸制作如右图所示的无盖直圆锥形容器，需要多少面积的彩纸（取 $\pi=3.14$）？



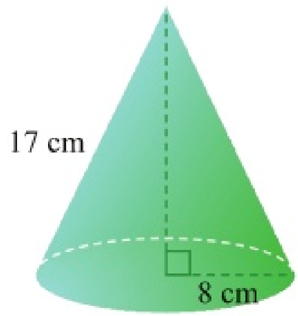
练习 6.7

1. 求下列各直圆锥的体积与表面积，答案以 π 表示：

(a)



(b)



2. 一直圆锥的体积是 $308\ \text{cm}^3$，若其底圆半径是 7 cm，求它的高 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

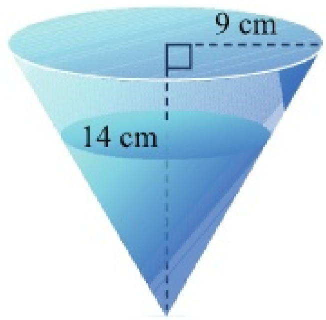
3. 一直圆锥的底圆的周长为 44 cm，若其体积是 $256\frac{2}{3}\ \text{cm}^3$，求它的高 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

4. 一直圆锥的高是 7 cm，若其体积为 $359\frac{1}{3}\ \text{cm}^3$，求它的底圆半径 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

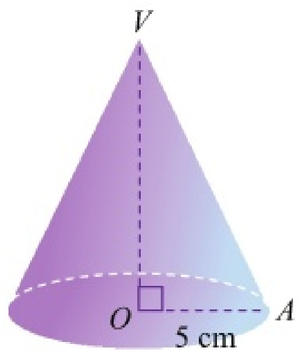
5. 下表为一直圆锥的部分资料。完成下表 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)：

	底圆半径	高	斜高	体积	侧面面积	表面积
(a)	5 cm	12 cm				
(b)	7 cm		25 cm			
(c)			10 cm		$188\frac{4}{7}\ \text{cm}^2$	
(d)		4 cm		$37\frac{5}{7}\ \text{cm}^3$		
(e)	8 cm					$628\frac{4}{7}\ \text{cm}^2$

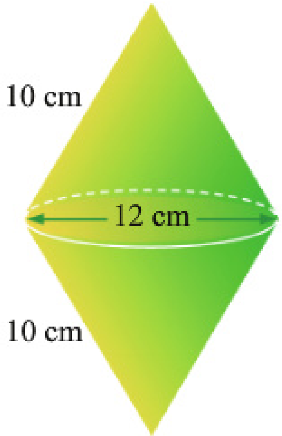
6. 右图所示为一直圆锥形的容器，它的高等于 14 cm，底圆半径为 9 cm。若容器内装有 352 mℓ 的水，求水面的高度 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。



7. 右图所示的直圆锥，它的侧面面积为 $65\pi\ \text{cm}^2$，
   (a) 求圆锥的表面积 (以 π 表示)；
   (b) 求圆锥的高；
   (c) 求圆锥的体积 (以 π 表示)。



8. 右图所示的立体是由两个全等的直圆锥粘合而成。求它的体积与表面积，答案以π表示。



6.8 球

如图 6-29 所示，一半圆绕着其直径旋转一周所得的曲面称为球面，球面所包围而成的立体称为球体，简称球。半圆的圆心是球体的球心，半圆的半径也是球体的半径。

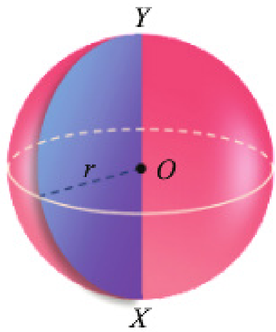


图 6-29

球的体积

$$球的体积 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

例题 1

求半径为 7 cm 的球的体积 (取$\pi = \frac{22}{7}$)。

解： 体积 $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3$

$= \frac{4312}{3}\ \text{cm}^3$

例题 2

如右图所示，一粒半径为 r 的铁球被放入一个底圆半径为 r，高为 $2r$ 的圆柱形水桶中。将水桶装满水，则拿出铁球后，水桶中的水有多深？



解： 水桶的体积 $= \pi r^2 \times 2r$

$= 2\pi r^3$

设拿出铁球后，水桶中的水深为 h。

水桶中水的体积 $= 2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$h = \frac{2}{3}r$$

$\therefore$ 水深 $\frac{2}{3}r$。

随堂练习 14

已知一球的体积为 $288\pi\ \text{cm}^3$，求它的半径。

球的表面积

球的表面积 $= 4\pi r^2$

例题 3

已知一球的体积为 $36\pi\ \text{cm}^3$，求它的表面积。

解： 设球的半径为 r。

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi$$

$$r^3 = 27$$

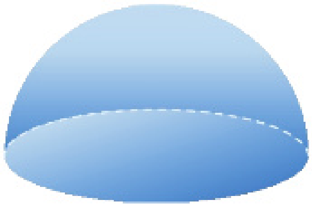
$$r = 3\ \text{cm}$$

$\therefore$ 球的表面积 $= 4\pi \times 3^2$

$= 36\pi\ \text{cm}^2$

例题 4

右图所示为一半球体，它的半径为 r。求它的表面积。



解： 半球体表面积 $=$ 底圆面积 $+ \frac{1}{2} \times$ 球面面积

$= \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$

$= 3\pi r^2$

随堂练习 15

若一球的表面积是 $5544\ \text{cm}^2$，求它的体积 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

练习 6.8

1. 一球的直径为 21 cm，求它的体积与表面积。
2. 一球的表面积为 $81\pi\ \text{cm}^2$，求它的体积。
3. 一球的体积为 $1\frac{43}{56}\ \text{cm}^3$，求它的表面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。
4. 完成下表 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)：

	球的半径	球的体积	球的表面积
(a)	$3\frac{1}{2}$ cm		
(b)		$22\frac{11}{24}\ \text{cm}^3$	
(c)			$616\ \text{cm}^2$

5. 64 个直径为 2 cm 的小铅球被熔化后再铸成一个大铅球，求大铅球的直径。
6. 一个半球体的直径为 28 cm，求它的体积与表面积 (取 $\pi=\frac{22}{7}$)。
7. 二球的半径之比为 3:5，求它们的
   (a) 表面积之比；
   (b) 体积之比。

总复习题 6

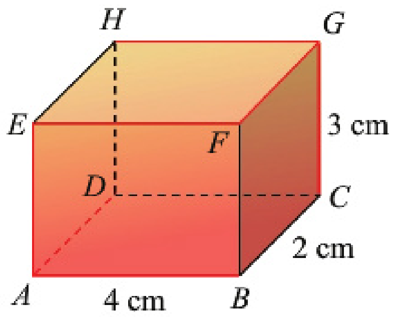
1. 已知一立方体的表面积是 $384\ \text{cm}^2$，求它的体积。
2. 已知一长方体的长是 6 cm，宽是 5 cm。若它的体积为 $120\ \text{cm}^3$，求它的表面积。
3. 有一长 6.4 cm，宽 5 cm 的长方体与边长 4 cm 的立方体体积相等，求长方体的高。

4. 一长方体的金属长 12 cm，宽 10 cm，高 4 cm。它被熔解后制成另一长 16 cm，宽 5 cm 的长方体，求它的高。

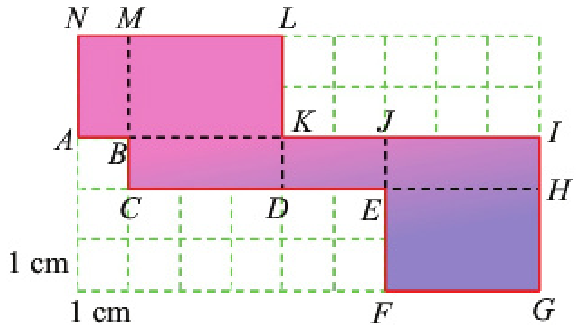
5. 制作一个长 40 cm，宽 30 cm，高 20 cm 的无盖长方体铁盒，需多少平方公分的铁片？

6. 一长方体水池装满时，可容纳 144000 ℓ 的水。已知此水池的高是 3 m，宽 6 m，
   (a) 求水池的长；
   (b) 若此水池装水至 80 cm 的高度，问池内有多少公升的水？

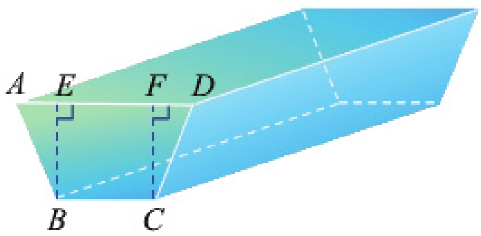
7. 作右图所示的长方体沿红线剪开所得的平面展开图。



8. 右图所示是一长方体的平面展开图。
   (a) 作出此立体，并求其表面积与体积。
   (b) 下列各边与哪一个边重合？
       (i) DE　　(ii) LM　　(iii) GH
   (c) 下列各点与哪些点重合？
       (i) D　　(ii) I　　(iii) A



9. 右图所示是一直棱柱状的水池，上顶是开放的。水池的截面 $ABCD$ 是一梯形，$AE = 3$ m，$EF = 6$ m，$DF = 3$ m，$CD = 5$ m。已知水池长 28 m，
   (a) 若将水池注满水，需多少公升的水？
   (b) 若要在水池内壁铺上瓷砖，求所需瓷砖的总面积。

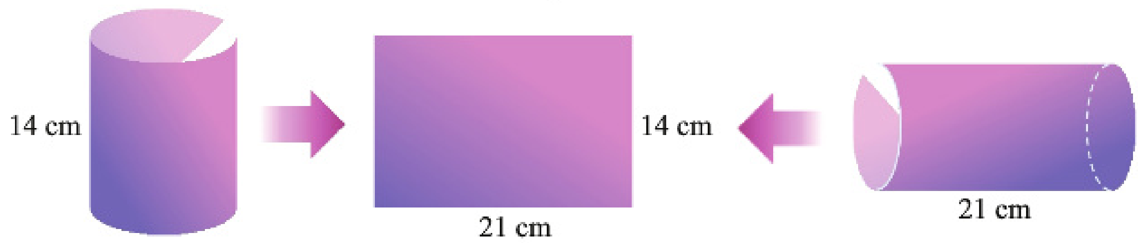


10. 一无盖的长方体木箱，箱子内部的长是 10 cm，宽是 8 cm，高是 5 cm。如果箱子的厚度是 1 cm，求制作此木箱所需木料的体积。

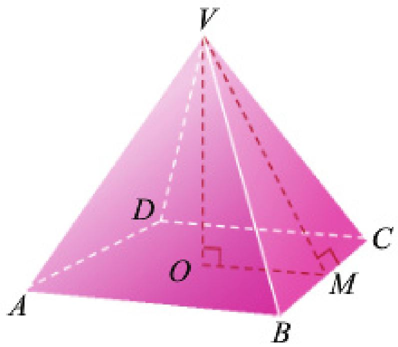
11. 一直圆柱管的外直径是 11 cm，管的厚度是 2 cm，
   (a) 求洞口的内直径；
   (b) 若此管长 35 cm，求制作此管所用材料的体积 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

12. 一直径为 35 cm 的圆柱形水筒盛满水。若 7.7 ℓ 的水被抽出，求水平面下降的高度 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。

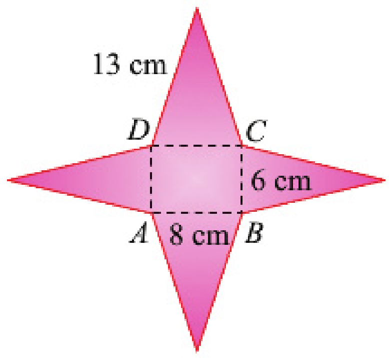
13. 下图所示是两个圆柱体，它们的侧面展开图都是长 21 cm，宽 14 cm 的长方形，求这两个圆柱体的体积 (取 $\pi = \frac{22}{7}$)。



14. 右图所示是一正棱锥，其底面 $ABCD$ 是一正方形，M 是 BC 的中点。若 $VM = BC$，且棱锥的表面积是 75 cm^2，求 AB 的长。



15. 右图所示是一直棱锥的平面展开图，其中 $ABCD$ 是长方形。求直棱锥的体积。



16. 将一圆心角为 216°，半径为 5 cm 的扇形折成一个直圆锥，
   (a) 求此直圆锥的底圆半径与高；
   (b) 求此直圆锥的侧面面积及体积，答案以 π 表示。

17. 一直圆锥容器是由一半径为 14 cm 的半圆所折成。

(a) 求此圆锥的底圆半径;

(b) 求此容器的体积,答案以π 表示。

18. 一直圆柱与一直圆锥具有相同的高 $2r$ cm,它们的底圆直径也同样是 $2r$ cm;另有一直径为 $2r$ cm 的球体,

(a) 求直圆柱,直圆锥与球体的体积之比;

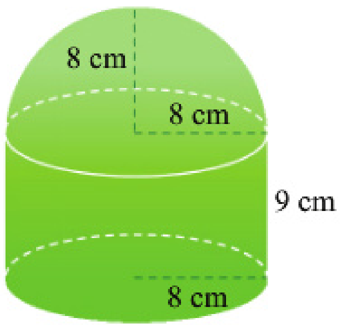
(b) 求直圆柱,直圆锥与球体的表面积之比。

19. 27 粒直径为 2 cm 的球被熔化后再铸成一个直圆锥,若圆锥的底圆半径是 3 cm,求它的高。

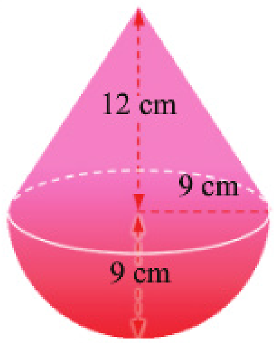
20. 一直径为 12 cm 的铅球被熔化后再铸成直径为 1 cm 的小铅球,问共可铸成多少个小铅球?

21. 求下列各立体的体积与表面积,答案以π 表示:

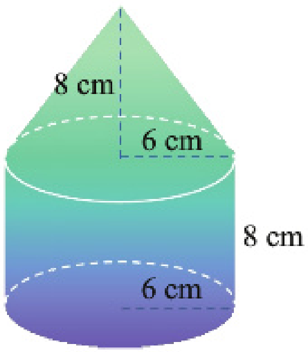
(a)



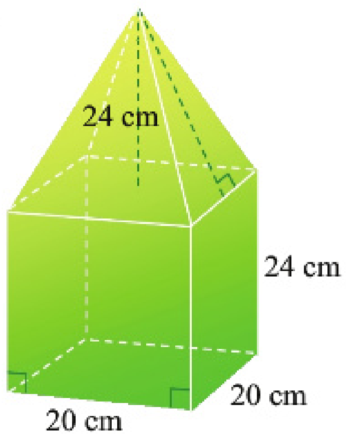
(b)



(c)



(d)



22. 制造一个空心而边长为 10 cm 的立方体,与制造一个空心而直径为 10 cm 的球体,何者所用的材料较多?

名词对照

1 变数法

变数法	variation	反变	inverse variation
正变	direct variation	联变	joint variation

2 指数与对数

指数方程式	exponential equation	对数	logarithm
底数	base	常用对数	common logarithm
指数	index		

3 统计表与统计图

统计学	statistics	象形图	pictograph
抽样调查	sampling	条形图	bar chart
频数分配表	frequency distribution table	复式条形图	multiple or grouped bar chart
数据	data	组合条形图	component bar chart
频数	frequency	圆形图	pie chart
全距	range	线形图	line graph
组距	class interval	茎叶图	stem and leaf diagram
组限	class limit	直方图	histogram
下限	lower limit	频数多边形	frequency polygon
上限	upper limit	累积频数分配表	cumulative frequency table
组中点	mid-point		
下组界	lower class boundary	累积频数多边形	cumulative frequency polygon
上组界	upper class boundary		

4 集中趋势与四分位数

集中趋势	central tendency	平均数	mean
算术平均数	arithmetic mean	四分位数	quartile
中位数	median	下四分位数	lower quartile
众数	mode	上四分位数	upper quartile

5 相似形

相似形	similar figures	相似比	similar ratio
相似多边形	similar polygons	相似三角形	similar triangles

6 立体图形、表面积与体积

平面	plane	直棱柱	right prism
平面展示图	net	斜棱柱	oblique prism
底面	base	正棱柱	regular prism
侧面	lateral faces	直圆柱	right circular cylinder
表面积	surface area	棱锥	pyramid
体积	volume	正棱锥	regular pyramid
棱柱	prism	直圆锥	right circular cone
截面	cross section	球	sphere

1 变数法

随堂练习 1 （第 5 页）

1.

x	$\frac{3}{2}$	3	6	8	10
y	6	12	24	32	40

2. (a) $y=-3x^3$ (b) -192

3. (a) $W=\frac{80}{3}t$ (b) RM 400

练习 1.1 （第 5 页）

1. (a) $V=5h$ (b) 63
   (c) 4.8

2.

x	4	9	25
y	6	9	15

3. (a) $y=-\frac{1}{2}x^2$
   (b) -32 (c) ± 6

4. (a) $y=2(x-1)^2$
   (b) 32 (c) -1 或 3

5. (a) $C=6W$ (b) 50 g

6. 122.5 公尺

7. (a) $t=ks$ (b) 4 小时

8. RM 8000

随堂练习 2 （第 9 页）

1.

x	0.6	0.9	3	6	9
y	30	20	6	3	2

2. (a) $y=\frac{16}{x^2}$ (b) 4

练习 1.2 （第 10 页）

1. (a) $y=\frac{8}{x}$
   (b) 16 (c) $\frac{4}{5}$

2. 3

3. (a) $y=\frac{16}{x^2}-1$
   (b) $-\frac{9}{25}$ (c) $\pm\frac{4}{3}$

4. (a) $y=\frac{2700}{x}$ (b) 150 天

5. (a) 2.5 小时 (b) 每小时 60 km

6. (a) $xa^2=1080000$
   (b) 432 (c) 40 cm

随堂练习 3 （第 13 页）

1. 18

2.

x	2	3	± 3
y	1	2	-1
z	12	$\frac{27}{32}$	-27

3. 1.2 mm

练习 1.3 （第 14 页）

1. -4 2. 15

3. 144 4. $\frac{3}{2}$

5. $p=4$，$q=18$

6. 5 天 7. 21 cm

总复习题 1 （第 15 页）

1. (a) $y=\frac{6}{x}$ (b) $\frac{3}{4}$

2. $s=5t^2$

3. $x=6\sqrt{y}$ 4. $w=\frac{98}{x}$

5. (a) $y=\frac{2}{\sqrt{2x-3}}$

(b) $\frac{2}{3}$ (c) $9\frac{1}{2}$

6. 16 7. 25

8. (a) 7 (b) $\frac{16}{9}$

9. 40.8 Pa

10. $1\frac{1}{2}$ cm 11. 80 cm^3

2 指数与对数

随堂练习 1 （第 22 页）

1. (a) $\frac{1}{81}$ (b) 5

(c) 1 (d) $-\frac{1}{32}$

(e) 49 (f) $\frac{3}{2}$

2. (a) x^7 (b) $\frac{1}{x^{10}}$

(c) a^6 (d) $\frac{1}{a^{10}}$

(e) $\frac{3}{b^2}$ (f) $\frac{8a^4}{b}$

练习 2.1 （第 23 页）

1. (a) $\frac{1}{343}$ (b) $\frac{64}{27}$

(c) 1 (d) $\frac{1}{16}$

(e) $-\frac{1}{27}$ (f) $\frac{1}{4}$

(g) $\frac{5}{3}$ (h) -16

(i) 4

2. (a) a^8 (b) $\frac{1}{a}$

(c) 1 (d) $\frac{1}{x^4}$

(e) $\frac{1}{x}$ (f) $\frac{1}{a^7}$

(g) $\frac{64}{a^{11}}$ (h) $-\frac{b^7}{8a}$

(i) $\frac{8}{125x}$

随堂练习 2 （第 27 页）

1. (a) $4x^{\frac{1}{2}}$ (b) $x^{\frac{3}{2}}$

(c) $x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$ (d) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2. (a) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3x}}$

(c) $\frac{5y^2}{\sqrt[3]{x}}$ (d) $\frac{3x}{2\sqrt{y^3}}$

3. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{27}$

(c) $\frac{1}{64}$ (d) 125

练习 2.2a （第 28 页）

1. (a) $2x^{\frac{3}{2}}$ (b) $2x^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}$

(c) $x^{-2}y^{-\frac{1}{2}}$ (d) $\frac{8}{3}x^{-1}y^{-\frac{1}{2}}$

2. (a) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$ (b) $\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

(c) $\frac{7}{x^3\sqrt[3]{y}}$ (d) $\frac{9\sqrt[6]{y}}{2x}$

3. (a) 125 (b) $\frac{27}{1000}$

(c) $\frac{1}{27}$ (d) $\frac{1}{27}$

(e) $\frac{343}{8}$ (f) $\frac{25}{4}$

(g) $\frac{1}{6}$ (h) $\frac{25}{9}$

随堂练习 3 （第 30 页）

1. (a) $a^{\frac{13}{15}}$ (b) $x^{\frac{17}{8}}y^3$

(c) 2^{4n}

2. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $5\frac{1}{4}$

(c) 135

练习 2.2b （第 30 页）

1. (a) 2^n (b) $\left(\frac{8}{3}\right)^m$

(c) 5^n (d) 729

(e) $\frac{1}{2}ab^{\frac{7}{3}}$ (f) 5^{n-2}

2. (a) 128 (b) 125

(c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

(e) 18 (f) 135

(g) −54 (h) $10\frac{1}{9}$

随堂练习 4 （第 32 页）

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$

3. 2 4. $\frac{1}{3}$

5. 3 或 1 6. 2

练习 2.3 （第 33 页）

1. −4 2. $-\frac{3}{2}$

3. 4 4. $\frac{7}{3}$

5. $\frac{1}{2}$ 6. 1

7. −9 8. $\frac{5}{3}$

9. 3 10. $\frac{9}{2}$

11. $\frac{5}{4}$ 12. $\frac{1}{3}$

13. $\frac{5}{4}$ 14. −6 或 2

15. $\frac{1}{2}$ 16. 9

随堂练习 5 （第 36 页）

1. (a) $\log_2\frac{1}{32}=-5$

(b) $\log_{25}5=\frac{1}{2}$

2. (a) $3^4=81$ (b) $7^{-3}=\frac{1}{343}$

(c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

3. (a) 3 (b) 125

(c) $\frac{1}{4}$

4. (a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{2}{3}$

练习 2.4a (第 37 页)

1. (a) $\log_8 512 = 3$ (b) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
   (c) $\log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$ (d) $\log_{729} 9 = \frac{1}{3}$
2. (a) $a^c = b$ (b) $2^6 = 64$
   (c) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = a$ (d) $64^{\frac{1}{3}} = 4$
3. (a) 16 (b) 2
   (c) $\frac{7}{4}$ (d) 4
4. (a) $\frac{5}{2}$ (b) $-\frac{1}{6}$
   (c) $\frac{3}{2}$ (d) $-\frac{3}{2}$

随堂练习 6 (第 41 页)

1. (a) 0.9208 (b) 1.9208
2. (a) $u+v+w$ (b) $1+u+v-w$

随堂练习 7 (第 44 页)

1. (a) 0.4515 (b) −0.3980
   (c) 0.3980 (d) 1.3010
2. (a) $2+u+v+w$ (b) $\frac{1}{2}(u+w-3v)$
   (c) $3u+v+\frac{1}{3}w-4$

随堂练习 8 (第 46 页)

1. (a) 2 (b) 2
2. (a) −12 (b) 8

练习 2.4b (第 46 页)

1. (a) 0.2519 (b) 1.5440
   (c) −1.1133 (d) 2.1133
   (e) 1.6171 (f) 1.0239
2. (a) $1+m+2n$ (b) $3m+2n$
   (c) $\frac{1}{2}(1+m-n)$ (d) $m+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$
   (e) $\frac{1}{2}m-2n-1$ (f) $2n-3m-3$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{4}{3}$
5. $\frac{15}{2}$
6. 2
7. −1
8. 3
9. 2
10. −1
11. 4
12. 3
13. 1
14. 0

总复习题 2 (第 47 页)

1. $2^{\frac{5}{6}}$
2. 1
3. $\frac{2}{7}$
4. 14
5. $\frac{31}{3}$
6. $\frac{1}{125}$
7. 3
8. 400
9. $\frac{1}{4x^{11}}$
10. p
11. x^4y^3
12. $\frac{b^5}{a^6}$
13. $\frac{3}{2}$
14. 2
15. $\frac{1}{3}$
16. 3
17. 0
18. 1
19. $\frac{1}{36}$
20. $\pm\frac{1}{27}$

21. (a) 3 (b) 81
(c) −7 (d) 4

22. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{4}$
(c) 4 (d) 6
(e) $\frac{5}{2}$ (f) $-\frac{3}{2}$

23. (a) 1.0791 (b) 1.6232
(c) 1.1761 (d) −0.3098
(e) 0.1584

24. (a) $y-x$ (b) $2x+y$
(c) $y+2-3x$ (d) $x+\frac{1}{2}-2y$
(e) $\frac{1}{2}(x+2y-3)$

25. 3 26. 2

27. 9 28. $\frac{1}{2}$

29. $\frac{9}{2}$ 30. 0

31. 4 32. 2

33. 2 34. 0

3 统计表与统计图

随堂练习 1 (第 51 页)

(a) 全面调查 (b) 抽样调查
(c) 抽样调查

随堂练习 3 (第 57 页)

1. (b) 40−49 (c) 0

练习 3.2 (第 58 页)

1. (a) 抽样调查 (b) 全面调查
(c) 抽样调查

4. (a) 2006 (b) 2010
(c) 2008，2012，2013，2015
(d) 2010

5. 95，24%

练习 3.3a (第 63 页)

3. (b) 收音机
(c) 有些学生家里同时拥有两种或以上表格所列的电器。
(d) 有些学生家里没有表格所列的电器。

4. (a) 4 月、10 月、11 月
(b) 248.6 cm

6. (a) 1990 (b) 2005
(c) 100%

7. (a) 30% (b) 四月
(c) 五月、六月

练习 3.3b (第 70 页)

4. (a) 600 人
(b) 甲组 200 人，乙组 250 人

练习 3.3c (第 76 页)

2. (a) 1.42 公尺 (b) 10 岁
(c) 19 岁

3. (a) 一月
(b) 七月、八月；平行

4. (a) 4900 公吨 (b) 1900 公吨
(c) 3000 公吨

(d) 由 2004 年开始下滑至 2005 年，之后反弹至 2006 年的巅峰，接下来就一路下滑至 2013 年。

5. (a) 2003 年至 2005 年，2008 年至 2009 年， 2010 年至 2011 年， 2014 年至 2015 年
(b) 2013 年
(c) 没有矛盾；资料显示为新生人数，而不是独中生总人数。

练习 3.3d (第 83 页)

4. (a) 第 4 天；50 位
(b) 第 7 天
(c) 第 3 天、第 4 天、第 7 天、第 8 天、第 9 天

5. (a) 43 班 (b) 37
(e) 54；54 离开其他数据较远。

随堂练习 10 (第 87 页)

(d) 总周数 (e) 21 周

练习 3.4 (第 88 页)

1. (a) 22% (b) 32%
(c) 35%

4. (b) 48 分 (c) 71 人

5. (b) 13 名 (c) 14 名
(d) 57.14%

总复习题 3 (第 90 页)

1. (a) 抽样调查 (b) 全面调查

5. (b) 圆形图 (c) 条形图

6. (a) 960 位 (b) 560 位
(c) 52%

7. (a) 90° (b) 100°
(c) 36 人 (d) 27.78%

8. (a) 薯类；6.5 公斤
(b) 糖类；1 公斤
(c) 不能

9. (d) 150 个 (e) 6 个
(f) 47.33%

13. (b) 28 人

14. (b) 4 辆

15. (b) 92% (c) 243 – 303 小时

16. 23% 17. 多

4 集中趋势与四分位数

随堂练习 1 (第 100 页)

1. 77 2. 74

练习 4.1a (第 100 页)

1. (a) 73 (b) 5.5

2. 5.2 3. 5

4. RM 235 5. 158.2 cm

6. 不一定；若男生女生人数相同，则是。

随堂练习 2 (第 102 页)

6.7

随堂练习 3 (第 104 页)

153 cm

练习 4.1b （第 104 页）

1. 2.11　　2. 66.4
3. (a) 127.3 cm　　(b) 127.75 cm
   (c) (a)比较准确
4. (a) 45 个　　(b) 14 人
   (c) 40 人　　(d) 1 人
   (e) 5 题　　(f) 5.27 题
5. 40.8 kg　　6. 1

随堂练习 4 （第 108 页）

1. (a) 13　　(b) 16
2. 1

随堂练习 5 （第 110 页）

(b) 平均数= 2.27，中位数= 2，众数= 2

练习 4.1c （第 110 页）

1. (a) 中位数= 3.5，众数= 2，4
   (b) 中位数= 5，众数= 1，8
   (c) 中位数= 13.5，没有众数
2. (a) 142 公分　　(b) 142 公分
3. 平均数= 6.8，众数= 7，中位数= 7
4. 平均数= RM 3290，中位数= RM3100，众数= RM 3100
5. (a) 188 名
   (c) 中位数= 65，众数= 70，平均数= 60.64

随堂练习 6 （第 113 页）

(a) $Q_1=2$，$Q_2=5$，$Q_3=8$

(b) $Q_1=2$，$Q_2=3$，$Q_3=6$

随堂练习 7 （第 115 页）

$Q_1=61$，$Q_2=69$，$Q_3=83.5$

练习 4.2 （第 115 页）

1. (a) $Q_1=3$，$Q_2=4$，$Q_3=6$
   (b) $Q_1=13$，$Q_2=15$，$Q_3=17.5$
   (c) $Q_1=0$，$Q_2=2$，$Q_3=4$
   (d) $Q_1=2.45$，$Q_2=2.8$，$Q_3=3.45$
2. (b) $Q_1=$ RM 47.5，$Q_2=$ RM 61，$Q_3=$ RM 70.5
3. (b) $Q_1=52.5$，$Q_2=63$，$Q_3=73.5$
   (c) 86%　　(d) 4 个

总复习题 4 （第 116 页）

1. 平均数= 5.7，中位数= 6，众数= 6
2. 平均数= 13，中位数= 13.5，众数= 11，14
3. 众数
4. 平均数= 172.5 小时，中位数= 172 小时
5. (a) 30
   (c) $x=12$，$y=18$
   (d) 2 人
6. (a) RM 10625
   (b) 没有；有个极端值 RM 25000 严重影响平均值。
7. (a) 60.33 字/分钟
   (b) 60 – 70 字/分钟
8. (a) 5　　(b) 8
   (c) $Q_1=3.5$，$Q_2=5$，$Q_3=7.5$
9. (b) $Q_1=176$，$Q_2=187$，$Q_3=1985$
   (c) 55%

5 相似形

随堂练习 1 (第 124 页)

(a) $x=76°$, $y=44°$

(b) $\frac{3}{4}$

随堂练习 2 (第 125 页)

8 cm，18 cm

练习 5.1 (第 126 页)

1. (a) 不相似 (b) 相似
   (c) 不相似 (d) 相似
2. 不相似
3. $x=75°$, $y=135°$, $a=\frac{15}{2}$
4. $a=9$, $x=106°$
5. 9 cm，16 cm
6. 4:9
7. 10 cm

随堂练习 3 (第 131 页)

(a) 不相似 (b) 相似

随堂练习 4 (第 133 页)

$CE=\frac{9}{2}$ cm, $AB=\frac{20}{3}$ cm

随堂练习 5 (第 136 页)

(a) 相似 (b) 不相似

随堂练习 6 (第 139 页)

(a) 相似 (b) 不相似

练习 5.2a (第 141 页)

1. 不相似
2. 相似
3. 不相似
4. 相似
5. 相似
6. 相似
7. $YQ=\frac{24}{5}$ cm, $QZ=\frac{16}{5}$ cm, $XZ=\frac{25}{3}$ cm
8. $\frac{20}{3}$ cm
9. (a) $\frac{7}{10}$ (b) 80 mm
   (c) $\frac{126}{5}$ mm

随堂练习 7 (第 143 页)

5 cm

随堂练习 8 (第 144 页)

$AG=\frac{16}{3}$ cm, $BG=\frac{2}{3}\sqrt{97}$ cm, $BE=\sqrt{97}$ cm

随堂练习 9 (第 145 页)

(b) $\frac{13}{4}$ cm

随堂练习 10 (第 148 页)

13 cm

练习 5.2b (第 149 页)

1. $x=\frac{14}{3}$
2. $x=\frac{5}{3}$
3. $x=\frac{32}{5}$, $y=\frac{18}{5}$

4. $x=\frac{24}{5}$

5. $x=\frac{10}{3}$

6. $x=\frac{27}{4}$， $y=\frac{40}{3}$

7. $x=6$， $y=12$

8. $x=40$， $y=14$， $z=40$

9. $x=\frac{36}{5}$， $y=\frac{15}{2}$

10. $x=\frac{80}{13}$， $y=\frac{88}{13}$

11. (b) $\frac{18}{5}$ cm

12. (b) 6 cm

13. $\frac{16}{3}$ cm

14. $CD=15$ cm， $AD=\frac{115}{6}$ cm， $CE=\frac{96}{23}$ cm

15. $AD=12$ cm， $GD=4$ cm，

$BG=\sqrt{41}$ cm， $BE=\frac{3}{2}\sqrt{41}$ cm

16. (b) $\frac{63}{5}$ cm

(c) $CE=\frac{84}{5}$ cm， $CD=16$ cm，

$AB=13$ cm

随堂练习 11 (第 152 页)

2:3

随堂练习 12 (第 154 页)

ΔADE 的面积 $=\frac{45}{4}$ cm^2

ΔABC 的面积 $=\frac{125}{4}$ cm^2

随堂练习 13 (第 155 页)

64 cm^2

随堂练习 14 (第 156 页)

$\frac{24}{7}$ cm

练习 5.3 (第 157 页)

1. 5:4
2. 44%
3. 54 cm^2
4. 56 cm^2
5. 36 cm^2
6. ΔABC 的面积 $=50$ cm^2

   ΔXYZ 的面积 $=18$ cm^2
7. $\frac{48}{5}$ cm^2
8. ΔAPQ 的面积 $=15$ cm^2

   ΔPQT 的面积 $=5$ cm^2

   ΔSRT 的面积 $=20$ cm^2

   ΔQRT 的面积 $=10$ cm^2

   ΔPST 的面积 $=10$ cm^2
9. ΔCDE 的面积 $=18$ cm^2

   ΔADE 的面积 $=24$ cm^2

   ΔBCE 的面积 $=24$ cm^2
10. $BD=4$ cm， $CD=2$ cm
11. (a) $DE=6$ cm， $AE=6$ cm，

    $EC=4$ cm

    (b) ΔCDE 的面积 $=8$ cm^2

    ΔADE 的面积 $=12$ cm^2

总复习题 5 (第 159 页)

1. (a) $45°$ (b) $\frac{24}{5}$ cm
2. $DE=\frac{33}{5}$ cm， $EC=6$ cm
3. (a) $\frac{15}{2}$ cm (b) $\frac{28}{3}$ cm^2
4. (b) $AD=12$ cm， $BC=\frac{35}{3}$ cm
5. $AD=24$ cm， $FC=9$ cm， $GC=12$ cm
6. (a) $CD=18$ cm， $AE=5$ cm
   (b) $\frac{80}{3}$ cm^2
7. (b) $BD=\frac{9}{2}$ cm， $AB=\frac{15}{2}$ cm，
   $AC=10$ cm
8. $2:1$
9. $CG=\frac{8}{3}$ cm， $GF=4$ cm
10. $\frac{539}{3}$ cm^2
11. $3:2$
12. (a) $\frac{45}{4}$ cm
    (b) ΔBDE 的面积 $=\frac{100}{9}$ cm^2
    ΔBEC 的面积 $=25$ cm^2
13. (c) $CD=6$ cm， $EF=2$ cm， $EG=\frac{7}{2}$ cm

6 立体图形、表面积与体积

随堂练习 1 (第 168 页)

1. 294 cm^2 2. 406 cm^2

随堂练习 2 (第 170 页)

3.375 m^3

随堂练习 3 (第 171 页)

80 cm^3

随堂练习 4 (第 174 页)

1. (a) 77.8 (b) 2780000
   (c) 0.048 (d) 0.89
2. 30 cm

练习 6.2 (第 174 页)

1. 384 cm^2， 512 cm^3
2. 5 cm， 125 cm^3
3. 216 cm^2
4. 4 cm
5. 300 cm^3
6. (a) 30 mm^3； 62 mm^2
   (b) 6 cm； 266 cm^2
   (c) 0.6 cm； 95.6 cm^2
   (d) 5 mm； 180 mm^3
7. 4 cm
8. 0.5 cm
9. 5 cm
10. (a) 476 cm^3， 472 cm^2
    (b) 308 cm^3， 424 cm^2
11. (a) 2380 (b) 9800
    (c) 0.672 (d) 0.00234
    (e) 0.024 (f) 5200
    (g) 780 (h) 0.89
    (i) 780

12. 20 公升　　13. 50 公升

14. (a) 7 m　　(b) 105000 公升

15. (a) 18 分钟　　(b) 45 分钟

随堂练习 5 （第 178 页）

(a) $52\ \text{cm}^2$，$24\ \text{cm}^3$

(b) (i) *NM*　　(ii) *NA*

(iii) *HI*

(c) (i) *A*　　(ii) *C*，*I*

(iii) *K*

(d) *MBAN*

练习 6.3 （第 179 页）

2. (a) 是　　(b) 不是

(c) 是　　(d) 不是

3. (a) 不是　　(b) 是

(c) 不是　　(d) 是

4. (a) $54\ \text{cm}^2$，$27\ \text{cm}^3$

(b) (i) *NM*　　(ii) *IJ*

(iii) *AB*

(c) (i) *N*，*J*　　(ii) *E*

(iii) *G*，*I*

(d) *GFEH*

5. (a) $16\ \text{cm}^2$，$4\ \text{cm}^3$

(b) (i) *FE*　　(ii) *HI*

(iii) *ED*

(c) (i) *F*，*B*　　(ii) *I*

(iii) *G*，*M*

(e) *BANC*

随堂练习 6 （第 184 页）

$27\ \text{cm}^3$

随堂练习 7 （第 186 页）

$45+3\sqrt{5}+6\sqrt{2}$

练习 6.4 （第 187 页）

1. $120\ \text{cm}^3$　　2. $23\ \text{cm}^2$

3. $216\ \text{cm}^3$　　4. $\left(27\sqrt{3}+90\right)\text{cm}^3$

5. $360\ \text{cm}^3$，$420\ \text{cm}^2$

6. (a) $60\sqrt{3}\ \text{cm}^3$　　(b) $\left(180+8\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

7. $420\ \text{cm}^3$，$\left(341+15\sqrt{17}\right)\text{cm}^2$

8. $2208\ \text{cm}^3$，$1096\ \text{cm}^2$

9. $112\ \text{cm}^3$，$168\ \text{cm}^2$

10. $117\ \text{cm}^3$，$151\ \text{cm}^2$

11. 450000 公升

随堂练习 8 （第 191 页）

105 cm

随堂练习 9 （第 193 页）

$80\pi\ \text{cm}^2$

练习 6.5 （第 193 页）

1. (a) $1584\ \text{cm}^3$，$754\frac{2}{7}\ \text{cm}^2$

(b) $3080\ \text{cm}^3$，$1188\ \text{cm}^2$

2. 9 cm

3. 4 cm

4. (a) $1078\ \text{cm}^3$，$616\ \text{cm}^2$

(b) 7 cm，$340\pi\ \text{cm}^2$

(c) 6 m，$528\ \text{m}^2$

(d) 3 cm，$462\ \text{cm}^3$

(e) 4 cm，$80\pi\ \text{cm}^3$

5. $20944\ cm^3$
6. 198 mℓ
7. $24640\ mm^3$，$4752\ mm^2$
8. $1710\pi\ cm^3$
9. 24 cm
10. $4576\ cm^2$
11. 14 cm，$1100\ cm^3$
12. $1884\ cm^2$
13. $52800\ cm^2$

随堂练习 10 (第 198 页)

1. 9 cm
2. $120\sqrt{3}\ cm^3$

随堂练习 11 (第 199 页)

$36\sqrt{3}\ cm^2$

练习 6.6 (第 199 页)

1. (a) $800\ cm^3$ (b) $720\ cm^3$
2. $30\ cm^3$
3. $12\ cm^3$
4. 4 cm，$96\ cm^2$
5. 20 cm
6. (a) 10 m (b) $260\ m^2$
7. $256\ cm^3$，$(176+48\sqrt{5})\ cm^2$
8. $(144+36\sqrt{3})\ cm^2$
9. $270\sqrt{3}\ cm^3$

随堂练习 12 (第 203 页)

3 cm

随堂练习 13 (第 205 页)

$204.1\ cm^2$

练习 6.7 (第 205 页)

1. (a) $96\pi\ cm^3$，$96\pi\ cm^2$
   (b) $320\pi\ cm^3$，$200\pi\ cm^2$
2. 6 cm
3. 5 cm
4. 7 cm
5. (a) 13 cm，$314\frac{2}{7}\ cm^3$，$204\frac{2}{7}\ cm^2$，$282\frac{6}{7}\ cm^2$
   (b) 24 cm，$1232\ cm^3$，$550\ cm^2$，$704\ cm^2$
   (c) 6 cm，8 cm，$301\frac{5}{7}\ cm^3$，$301\frac{5}{7}\ cm^2$
   (d) 3 cm，5 cm，$47\frac{1}{7}\ cm^2$，$75\frac{3}{7}\ cm^3$
   (e) 15 cm，17 cm，$1005\frac{5}{7}\ cm^3$，$427\frac{3}{7}\ cm^2$
6. $9\frac{1}{3}$ cm
7. (a) $90\pi\ cm^2$ (b) 12 cm
   (c) $100\pi\ cm^3$
8. $192\pi\ cm^3$，$120\pi\ cm^2$

随堂练习 14 (第 208 页)

6 cm

随堂练习 15 (第 209 页)

$38808\ cm^3$

练习 6.8 (第 210 页)

1. $4851\ cm^3$，$1386\ cm^2$
2. $381\frac{6}{7}\ cm^3$
3. $7\frac{1}{14}\ cm^2$
4. (a) $179\frac{2}{3}\ cm^3$，$154\ cm^2$
   (b) $1\frac{3}{4}$ cm，$38\frac{1}{2}\ cm^2$
   (c) 7 cm，$1437\frac{1}{3}\ cm^3$
5. 8 cm
6. $5749\frac{1}{3}\ cm^3$，$1848\ cm^2$
7. (a) 9 : 25 (b) 27 : 125

总复习题 6 (第 210 页)

1. $512\ cm^3$
2. $148\ cm^2$
3. 2 cm
4. 6 cm
5. $4000\ cm^2$
6. (a) 8 m (b) 38400 公升
8. (a) $22\ cm^2$，$6\ cm^3$
   (b) (i) *FE* (ii) *JI*
   (iii) *AN*
   (c) (i) *B* (ii) *M*
   (iii) *C*，*G*
9. (a) 1008000 公升
   (b) $520\ m^2$
10. $320\ cm^3$
11. (a) 7 cm (b) $1980\ cm^3$
12. 8 cm
13. $491\frac{5}{44}\ cm^3$，$327\frac{9}{22}\ cm^3$
14. 5 cm
15. $192\ cm^3$
16. (a) 3 cm，4 cm
    (b) $15\pi\ cm^2$，$12\pi\ cm^3$
17. (a) 7 cm (b) $\frac{343\sqrt{3}}{3}\pi\ cm^3$
18. (a) 3 : 1 : 2 (b) $6:(1+\sqrt{5}):4$
19. 12 cm
20. 1728 个
21. (a) $\frac{2752\pi}{3}\ cm^3$，$336\pi\ cm^2$
    (b) $810\pi\ cm^3$，$297\pi\ cm^2$
    (c) $384\pi\ cm^3$，$192\pi\ cm^2$
    (d) $12800\ cm^3$，$3360\ cm^2$
22. 立方体